



Análisis de tres categorías del conocimiento matemático para la enseñanza de la generalización en la escuela primaria

Hilduara **Velásquez** Echavarría
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia

sarcavelasquez@gmail.com

José Wilde **Cisneros**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia

jose.wilde@gmail.com

Walter Fernando **Castro** Gordillo
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia

wfcastro82@gmail.com

Patricia **Konic**
Departamento de Matemática , Universidad de Rio Cuarto
Argentina

pkonic@gmail.com

Resumen

Diversas investigaciones informan sobre las dificultades que los maestros tienen para reconocer y promocionar el razonamiento algebraico elemental. En este taller se discute sobre tareas de generalización, sus características y los vínculos que éstas tienen con el modelo del “conocimiento matemático para la enseñanza” (MKT) propuesto por Ball y colaboradores. Se cuestiona el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), en las categorías del Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y el Conocimiento Especializado (CSK) en tareas relacionadas con la generalización en la escuela primaria. Se propone una herramienta de análisis epistémico para identificar conocimientos presentes en las tareas de generalización y los conflictos emergentes en su discusión. Esta herramienta promueve vincular las tres categorías del conocimiento del profesor.

Palabras clave: Conocimiento matemático para la enseñanza, generalización, formación de profesores, razonamiento algebraico elemental, análisis epistémico.

Presentación

El propósito del taller es debatir los conocimientos para la enseñanza de temas relacionados con la generalización en la escuela primaria. Se pretende movilizar tanto aspectos del modelo del conocimiento del profesor como mostrar una herramienta para el análisis didáctico- matemático (Godino, 2011) para poner en cuestión los conocimientos del maestro durante la enseñanza de temas específicos.

El taller se desarrolla en dos momentos: en el primero, se indaga con los participantes sobre la forma en que abordan la generalización de patrones puntuales; en el segundo momento, se desarrollan dos tareas de generalización matemática escolar.

Marco Teórico

El estudio del conocimiento que deben tener los maestros para la enseñanza de las matemáticas ha sido un asunto de reflexión e investigación. Investigadores como (Shulman, 1986, 1987; Ball, 2000; Ball, Hill, & Bass, 2005; Ball, Lubienski, & Mewborn, 2001; Godino, 2009, 2011; Godino, Batanero, & Font, 2007; Gómez, 2007; Hill, Rowan & Ball, 2005; Ponte, 2012; Ponte & Chapman, 2008) han propuesto, desde diversas perspectivas epistemológicas del conocimiento matemático y de la educación matemática, diferentes modelos que han permitido describir, valorar y guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

El Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), propuesto por Shulman (1987) ha servido de referencia para otros trabajos de investigación como los de Ball (2000); Ball et al., (2001) quienes han introducido la noción de “conocimiento matemático para la enseñanza” (MKT)¹. Hill, Ball y Schilling (2008) definen el conocimiento matemático para la enseñanza como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y desarrollo en el alumno” (p. 374). Es aquel conocimiento que caracteriza al maestro que enseña matemáticas “Tal conocimiento no es algo que tendría un matemático en virtud de haber estudiado matemáticas avanzadas... más bien es un conocimiento especial para la enseñanza de las matemáticas” (Ball et al., 2001, p. 448).

El equipo de investigación de Ball et al. (2005) establece dos categorías del Conocimiento Matemático para la Enseñanza: el Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido; en la primera categoría se ubican, Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), y Conocimiento en el Horizonte Matemático. En la segunda categoría se ubican tres tipos de conocimiento: el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), y el Conocimiento del Currículo; en la Figura 1 se aprecia estas categorías de conocimiento. Sin embargo éste modelo falla en proponer articulaciones entre estas categorías de conocimiento.

En el taller se propone articularlas y conectarlas en el marco de una temática específica de interés tal como la generalización matemática escolar en el nivel de primaria.

¹ Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

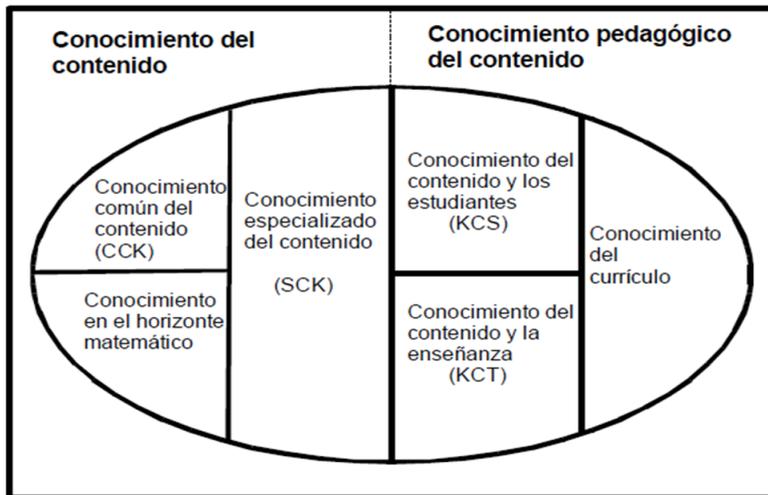


Figura 1. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill et al., 2008, p. 377).

En la investigación (Hill et al., 2005) sobre la influencia del conocimiento matemático para la enseñanza, en el desempeño de los estudiantes, se afirma que "...el conocimiento del contenido juega un papel fundamental incluso en la enseñanza de contenidos elementales de matemáticas" (p. 399). La manifestación de éstos conocimientos, pueden evidenciarse en la manera como los niños abordan situaciones de generalización en diferentes contextos matemáticos así como en los conocimientos requeridos por el maestro para la enseñanza de los procesos de generalización matemática escolar.

Los estudiantes de secundaria tienen dificultades con el aprendizaje del álgebra por la forma como se aborda en el currículo escolar, que se caracteriza por la presencia de fórmulas y procedimientos sintácticos que parecen carentes de significado para los niños (Carraher, Martínez & Schliemann, 2008; Mason, 1996; Molina, 2006; Molina, Castro & Castro, 2009; Godino, Castro, Ake & Wilhelmi, 2012) y que manifiestan una ruptura con la experiencia aritmética de los niños. Estas dificultades tienden a subsanarse mediante el estudio temprano del álgebra en la primaria (Derry, Wilsman & Hackbarth, 2007; Strother, 2011) enfatizando en procesos de generalización, búsqueda de patrones y regularidades, modelación, y representación de diferentes contextos matemáticos (Godino & Font, 2003).

Mason (1996) argumenta a favor de la introducción del álgebra en la escuela primaria, al reconocer que los estudiantes tienen capacidades naturales de generalización y habilidades para expresar patrones de formación, de modo que el desarrollo del razonamiento algebraico depende, esencialmente, del tratamiento que se da al álgebra desde los primeros grados. Diversos estudios (Blanton & Kaput, 2006; Molina, 2006) coinciden en que el álgebra puede enseñarse a partir de los primeros grados escolares y puede servir como una preparación para el estudio del álgebra en grados superiores, y exponen el caso de la generalización como un enfoque a través del cual se hace factible esta propuesta. Otros enfoques son: la resolución de problemas, la modelación y la función.

Lee (1996) afirma "No es difícil demostrar que la función, la modelación, y la solución de problemas son todas actividades de generalización, que el álgebra y todas las matemáticas tratan con generalización y patrones" (p. 102). Cuando los estudiantes producen una expresión o

representación sucinta a partir de la comprensión que tienen, hay generalización. Carraher et al. (2006) presentan la generalización como una actividad intelectual que realizan los sujetos habitualmente y que consiste en detectar regularidades y generar una expresión para éstas. La expresión puede ser verbal, simbólica, icónica o gráfica.

Stacey (1989) hace una distinción entre la generalización cercana, que consiste en la identificación de un patrón a partir de una estrategia de conteo, un dibujo o una tabla; y la generalización lejana, que se caracteriza por la identificación de una regla general, independiente del caso que se considere.

Godino, Rivas, Castro & Konic (2008); Castro, Godino & Rivas (2011) proponen una herramienta de análisis epistémico de las tareas, que tiene tres objetivos: El primero, explorar objetos y significados puestos en juego en la solución de una tarea; el segundo, identificar posibles conflictos de significado y predecir dificultades y errores que podrían surgir en las soluciones que los estudiantes brindarían a la tarea, y el tercero, explorar cómo el uso de las entidades primarias permite predecir e identificar conflictos potenciales. Esta herramienta favorece dar una mirada tanto a los elementos primarios de significado como a los conflictos que se ponen en juego en la solución de una tarea matemática y que se manifiestan durante la actividad generada con motivo de su solución.

Metodología

Las actividades durante el taller se desarrollan en dos momentos; en el primero se proponen dos tareas de generalización matemática, una vez los participantes las resuelvan, se formulan cuestionamientos sobre los conocimientos requeridos por el maestro para su enseñanza y se resaltan los posibles conflictos entre las soluciones de los niños y las de los maestros.

En el segundo momento los participantes resuelven dos tareas matemáticas de generalización y a continuación, se ponen en cuestión las tres categorías del conocimiento del maestro, en torno a las soluciones dadas por los participantes. Se incluyen soluciones dadas por niños de escuela elemental y maestros en formación, que favorecen la discusión de las posibles dificultades del aprendizaje de éste tema en particular.

Las reflexiones se orientan hacia el establecimiento de algunas relaciones entre tres de las categorías de conocimiento (MKT): el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) y el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT). Mediante la propuesta de análisis didáctico de Godino (2011) se articulan las tres categorías donde el conflicto de significado orienta el análisis de las tareas.

Primer momento

Tarea 1. Observa la siguiente secuencia de figuras:

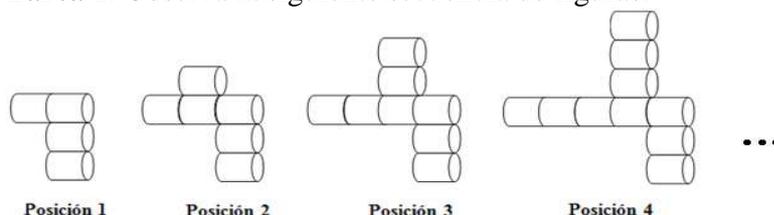


Figura 2. Secuencia de cilindros.

Dibuja la figura de la quinta posición

¿Cuántos cilindros conforman la figura de la octava posición?, explica tu respuesta

¿Cómo encontrarías la cantidad de cilindros que están en una posición cualquiera?

¿Existe una configuración que contenga 25 cilindros?

¿En cuál posición está la configuración que contiene 30 cilindros?

Tarea 2. Encuentra el patrón de formación de los números que se dan a continuación, y escribe los tres números siguientes: 32, 16, 8, 4, 2, 0.5,...

Segundo momento

Tarea 3. Discutir la regla para construir triángulos a partir de una configuración y de una condición dada².

Con tres palillos o palos de helado se forma un triángulo de tal manera que para cada lado se utilice sólo un palillo, como se muestra en la Figura 3.

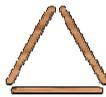


Figura 3. Construcción de un triángulo con tres palillos.

Ahora, utilizando uno de los lados del triángulo armado, construir otro triángulo pero usando dos palillos cada vez (un palillo es un lado de la figura en forma de triángulo), como se exhibe en la Figura 4.

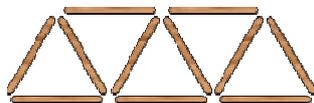


Figura 4. Una forma de construcción de triángulos.

Algunos cuestionamientos son:

1. ¿Cuántos palillos se necesitan para armar 10 triángulos? ¿Para armar 20 triángulos? ¿Para armar 32?
2. ¿Cómo saber cuántos palillos se requieren para construir 100 triángulos con las características dadas? Sin necesidad de hacer los triángulos. ¿Qué procedimiento se puede seguir?

En la Figura 5 se observa otra construcción alterna de triángulos, la cual pretende problematizar la tarea, en tanto que es posible construir un triángulo usando tan solo un palillo. Esto se puede ver en la parte inferior de la Figura 4, con lo cual se altera la regla propuesta inicialmente.

² Ejercicio tomado de Mora (2012).

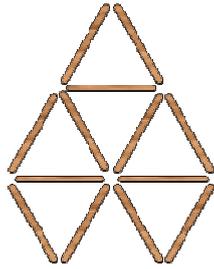


Figura 5. Otra forma de construcción de triángulos.

Tarea 4. A partir de la secuencia de la Figura 6, construya las dos posiciones siguientes.

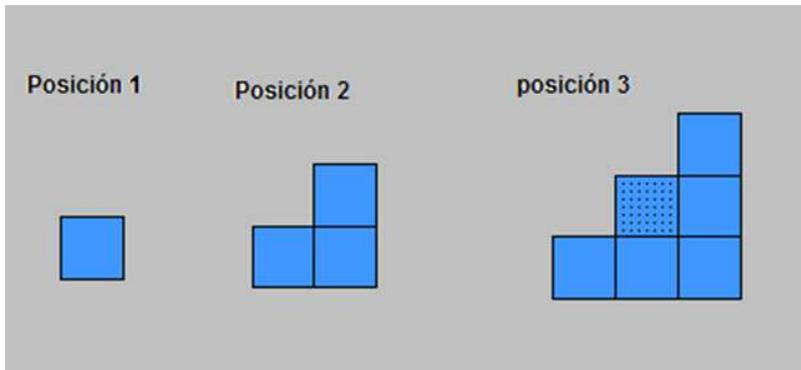


Figura 6. Secuencia de cuadrados

Identifique el patrón de formación de la secuencia.

¿Cómo se puede expresar simbólicamente la regla de formación de la secuencia?

¿Cuántas fichas corresponden a la posición 10?, realiza ésta operación sin considerar individualmente la cantidad de fichas correspondientes a las posiciones 4 al 9.

¿Cómo se puede expresar la cantidad de fichas ubicadas en la posición n?

A partir de la posición 2, con la misma cantidad de fichas de cada posición y conservando la configuración, construya las formas rectangulares como se aprecia en la Figura 7.

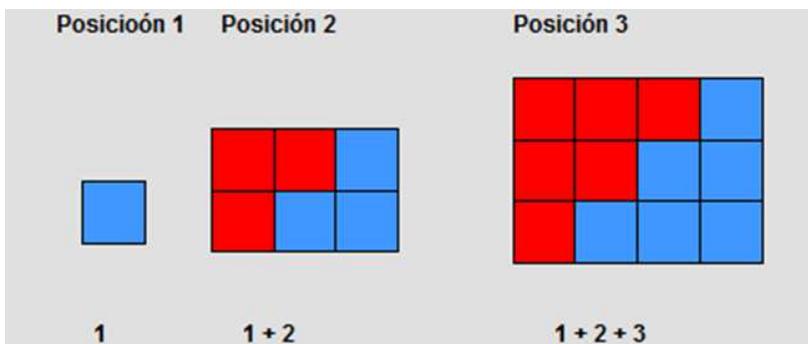


Figura 7. Formas rectangulares

¿Cuáles son las dimensiones de cada rectángulo obtenido?

¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo en la posición 10?

¿Cómo varía el área del rectángulo en cada una de las posiciones?

¿Cuál es la expresión algebraica que representa las dimensiones del rectángulo de la posición n ?

Si B representa la base y H representa la altura, calcule el área del rectángulo ubicado en la posición n .

Se indaga con los participantes sobre los conocimientos que debe tener el maestro para abordar dicha tarea, las dificultades que puede presentar el estudiante en la solución de la misma y los posibles conflictos que se presentan en su enseñanza.

Conclusiones

Durante las discusiones y análisis que se proponen en el taller, se espera que el maestro reflexione no solo sobre el conocimiento del contenido, sino sobre los conocimientos que se requieren para la enseñanza. Se espera que los maestros en formación inicial y continuada de matemáticas, logren reconocer la complejidad del entramado de conocimientos que se requieren para la planeación y desarrollo de las tareas matemáticas para la enseñanza de temas específicos.

Vía el uso de la herramienta de análisis epistémico y didáctico, los maestros pueden no solo anticipar los posibles conflictos de significado que emergen durante la solución de tareas matemáticas por parte del estudiantes sino prever la complejidad del proceso de enseñanza. La identificación de conflictos de significado puede ser una herramienta para movilizar tres tipos de conocimiento: conocimiento matemático para la enseñanza; el conocimiento del contenido y la enseñanza, y el conocimiento del contenido y los estudiantes.

Las discusiones y análisis anteriores favorecen poner en cuestión la generalización matemática escolar como una vía de introducción del álgebra elemental en la escuela primaria, además de poner en cuestión los tres tipos de conocimientos planteados en el modelo de Hill et al., (2008). Una cambio en su concepción formalista de la generalización, el reconocimiento de los conflictos de significado y la relación entre los tres tipos de conocimiento planteados en este modelo, ayudaría a que los maestros mejoren el diseño instruccional de tareas y actividades matemáticas.

Los niños pueden presentar dificultades en el aprendizaje, debido a la complejidad del conocimiento matemático, a las creencias epistemológicas de los maestros y al diseño instruccional de actividades de aprendizaje que se proponen sin efectuar un análisis epistémico y de reconocimiento de conflictos. Las soluciones dadas por los maestros son solo una parte del trabajo de diseño instruccional que un maestro debe contemplar. Consideramos que los conflictos de significado pueden relacionar las tres categorías de conocimiento matemático para la enseñanza: Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y el Conocimiento Especializado (CSK).

La discusión de tareas de generalización y su ampliación epistémica ayuda a reconocer la complejidad de la actividad matemática, aún en casos aparentemente sencillos de reconocimiento de patrones o de reglas, asociadas al análisis de la validez de la misma, por parte de los estudiantes.

Aún en actividades matemáticas aparentemente sencillas se manifiesta la complejidad de la estructura del conocimiento matemático y la necesidad de un “conocimiento matemático para la

enseñanza". Es deseable por tanto generar espacios de formación continuada de maestros, donde se reflexione sobre los conocimientos que se requieren para asumir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se requiere diseñar e implementar instrumentos que permitan valorar los conocimientos del maestro, para generar procesos de transformación de las prácticas en la escuela. El análisis del conocimiento matemático para la enseñanza de los procesos del maestro que enseña matemáticas, puede contribuir al diseño de programas de formación de maestros, a la implementación de normas y de políticas educativas que podrían ayudar a mejorar el proceso de formación matemática de los niños.

Referencias y bibliografía

- Ball, D. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.
- Ball, D., Hill, H. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: ¿Who know mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-46.
- Ball, D., Lubienski, S. & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Blanton, M. & Kaput, J. (2006). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Carraher, D., Martínez, M. & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22.
- Castro, W. F., Godino, J. D. & Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *Revista Unión*, 3, 73-88.
- Derry, S., Wilsman, M. & Hackbarth, A. (2007). Using contrasting case activities to deepen teacher understanding of algebraic thinking and teaching. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 305-329.
- Godino, J. (2011). Indicadores de la Idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. CIAEM*. Recife, Brasil.
- Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Iberoamericana de educación matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V., (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.
- Godino, J., Castro, W., Ake L., & Wilhelmi, M (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Revista Bolema*, 26(42), 483-511.
- Godino, J. D. & Font, V. (2003). [Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros](http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf). Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf (2012, 27 de junio).
- Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F. & Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. In *ICME 11*. Morelia: ICME.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Departamento de didáctica de la matemática, España.

- Hill, H., Ball, D. & Schilling, S. (2008). Unpacking “pedagogical content knowledge”: Conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Hill, H., Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42, 371. Disponible en: <http://aer.sagepub.com/content/42/2/371>. (2012, 18 de agosto).
- Lee, L. (1996). An initiation into algebraic activities culture through generalization activities. En N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (Vol. 18, pp. 87-106) Kluwer academic publishers. Dordrecht.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching*. C. K. Nadime Bednarz, Lesley Lee. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers: 65-86.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis doctoral). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Godino, J., Castro, W, Ake, L., & Wilhelmi. (2012). *Naturaleza del razonamiento algebraico*. Bolema, pp.483-511.
- Molina, M., Castro, E, & Castro, E. (2009). Elementary students’ understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 341-368.
- Mora, L. (2012). *Algebra en primaria*. Convenio MEN Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.
- Ponte, J. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers’ knowledge and development. En L. D. English (Ed), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2th ed.) Nueva York: Routledge. 225-263.
- Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y Práctica de la educación matemática*, 93-98.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164.
- Strother, S. A. (2011). *Algebra Knowledge in early elementary school supporting later mathematical ability* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Louisville, Kentucky.