



## **Investigações Matemática Sobre Análise Combinatória Por Alunos do Ensino Médio do Instituto Federal do Tocantins**

Albano Dias Pereira **Filho**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins campus Porto Nacional  
Brasil

[albano.filho@ifto.edu.br](mailto:albano.filho@ifto.edu.br)

Nielce Lobo **Da Costa**

Universidade Anhanguera de São Paulo

Brasil

[nielce.lobo@gmail.com](mailto:nielce.lobo@gmail.com)

Elias Vidal Bezerra **Junior**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins campus Porto Nacional  
Brasil

[eliasvidal@ifto.edu.br](mailto:eliasvidal@ifto.edu.br)

### **Resumo**

Este artigo tem por base um estudo sobre investigação matemática realizada com alunos da 2ª série do ensino médio do Instituto Federal do Tocantins. A investigação se coloca em uma perspectiva qualitativa, com base na tipologia de Ponte (2009). O objetivo da pesquisa foi desenvolver e aplicar atividades que possibilitasse aos alunos o desenvolvimento de investigação matemática acerca do estudo da Análise Combinatória. A finalidade foi investigar o impacto desta experiência nos alunos, tentando compreender não apenas o modo como eles formulam questões e hipóteses, como arquitetam e consolidam a escolha de informação, analisam os dados que coletaram e ainda o disseminar dos resultados obtidos. Durante a concretização da tarefa, havia o papel de professor orientador das tarefas e no desenrolar foram percebidas conclusões as quais garantem que é vantajoso, tanto para os professores como para os aprendizes e ainda que as atividades realizadas promovessem a aprendizagem não mecanizada, surpreendentemente.

*Palavra chave:* Atividades Investigativas, Principio Multiplicativo, Análise Combinatória

## **Introdução**

Desde quando foram realizados os primeiros contatos com o ensino de análise combinatória pode-se verificar dificuldades de entendimento e compreensão relativas aos tópicos estudados em Análise Combinatória. Diante de tal preocupação nos motivamos a preparar atividades que possam vir subsidiar o desenvolvimento desse tema.

O estudo da Análise Combinatória incide em resolver problemas do dia a dia. Problemas que são necessários prescrever de quantos modos determinado evento pode ocorrer. Algumas vezes, basta escrever uma lista de todos os elementos do conjunto apresentado e em seguida contá-los. Apesar disso, em muitos casos, o conjunto pode ser demasiadamente grande para se fazer essa contagem direta dos seus elementos e por isso são necessários outros processos de contagem.

No processocombinatório nos permite estudar os tópicos, a citar, princípio fundamental da contagem, fatorial, arranjos simples, permutação simples, combinação e permutação com elementos repetidos cujo procedimento permite determinar as coleções finitas de objetos que satisfaçam certos critérios específicos, preocupando-se, em particular, com a contagem de objetos nessas coleções, ou seja, permite-nos produzir o número de possibilidades lógicas de certo evento, sem essencialmente enumerar cada caso.

Percebe-se que, na perspectiva do ensino da matemática, a Análise Combinatória se insere na realidade das dificuldades e obstáculos de forma geral, independentemente do nível de ensino. Tal afirmação é baseada em empirismo, uma vez que sempre propus a ministrar tópicos de Análise Combinatória, normalmente o assunto mostrava-se particularmente hipotético para muitos alunos, pensam que ao se deparar com um problema de Combinatória, eles devem inicialmente descobrir se o problema a ser tratado é um problema de arranjo, combinação ou permutação, ou seja, mecanicamente tentam descobrir a que tipo de agrupamento, arranjo, permutação ou combinação o problema pertence, para depois resolvê-lo utilizando a fórmula adequada. Deixando de buscar o raciocínio lógico e até mesmo um único entendimento para as atividades, uma vez que a maioria dos problemas, possa resolvido pelo princípio fundamental da contagem.

Assim, a idéia proeminente deste trabalho é discutir atividades investigativas de Análise Combinatória realizadas com uma turma de alunos do ensino médio, em outras palavras, abordar a Análise Combinatória sem apelar excepcionalmente ao uso de fórmulas. Sendo assim, propomos abordar a Análise Combinatória através de uma vertente cuja principal ferramenta é a investigação matemática e posteriormente o princípio fundamental da contagem.

Entende-se que a Análise Combinatória deveria ser um tópico da matemática repleta de problemas capazes de motivar os alunos, e mesmo assim, ela é considerada uma disciplina complicada, em que o alunato tem dificuldades para encontrar o raciocínio correto para desenvolver cada problema.

Consoante Vazquez e Malagutti (2009), atualmente, a Análise Combinatória é definida como um ramo da Matemática que permite resolver os problemas que são necessários escolher, arrumar e, principalmente, contar os objetos de um conjunto. Tal conteúdo quando explorado em forma de problemas traz certa dificuldade em relação à formulação e interpretação de seus enunciados, pois exige flexibilidade de pensamento, ou seja, para resolvê-los é necessário parar, concentrar, discutir e pensar.

Pretende-se que os alunos trabalhando em grupo, de forma investigativa e colaborativa, consigam parar, concentrar, discutir, pensar, se imaginar realizando o que vai fazer e interagir com o problema, para que assim possam chegar a uma melhor definição dos conceitos, isto é, terminado o estudo, os aprendizes devem comunicar os resultados da sua investigação, obviamente, com cautela a preparar argumentos para defenderem, as opções que tomaram e as interpretações que fizeram ao longo do processo de investigação.

Brasil ([4], p.44) traz um ótimo embasamento para a necessidade de um aprofundamento da Análise Combinatória no seguinte trecho:

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizarem inferências e fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isso mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (PCNEM, (BRASIL [4], p.44).

Indubitavelmente acredita-se que as habilidades de descrever e analisar um vasto número de dados, realizarem inferências e fazer previsões, deve ser trabalhado desde Ensino Fundamental, assim o raciocínio lógico e combinatório dos alunos já vêm sendo preparado para analisar situações como o método de contagem e, com fator proeminente, principalmente se pensarmos na nova vertente de ensino que estamos vivenciando, um ensino mais cognitivo e menos pautado no uso de fórmulas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental, por sua vez, trazem uma preocupação no sentido de acrescentar ao estudo dos números, operações, espaço, formas, grandezas e medidas, conteúdos que permitam tratar as informações que os alunos recebem todos os dias, levando-os a aprender a lidar com dados estatísticos, tabelas, gráficos e a utilizar idéias relativas à probabilidade e à combinatória. Nos PCN's conteúdos como Estatística, Probabilidade e Combinatória estão incorporados ao item "Tratamento da Informação" que a finalidade de evidenciá-los devido à importância de seus usos atuais.

Para os PCN's, o bloco de estudos relativos a noções de estatística, de probabilidade e de combinatória não pretende o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolva combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem.

Percebe-se então a importância de ser explorado em diferentes momentos da aprendizagem, bem como aprofundando adequadamente a cada nível de ensino para que se possa ter o domínio combinatório por parte do aluno, desde o início de sua escolarização. Desta forma, acredita-se que o contato do aluno com a Combinatória desde os primeiros anos da escola básica deve ocorrer de modo a permitir a sua familiarização com os problemas, levando-o a descrever os casos possíveis e contá-los, através de uma representação por ele escolhida, sem regras a princípio, de modo a adquirir uma forma sistemática e gradativa para sua resolução, possibilitando uma posterior formalização no Ensino Médio.

A constatação, depois algum tempo trabalhando com alunos do Ensino Médio, percebendo suas inquietações de entendimento e compreensão referentes à Análise Combinatória, levou-nos a uma ideia que a introdução dos conceitos relativos a esse conteúdo, mesmo que de forma propedêutica, utilizando a metodologia de investigação e o princípio fundamental da contagem, pode ser uma abertura para rompermos com esse paradigma que se trata de um conteúdo árduo, porém sim de um conteúdo interessante e que pode ser entendido através de raciocínios primeiramente simples para depois começar a explorar problemas mais complexos.

Desta forma diante das dificuldades encontradas pelos alunos com relação a este conteúdo, bem como a preocupação de alguns professores em trabalhar o assunto, decidimos preparar um conjunto de atividades e utilizar método investigativo para trabalhar em sala de aula buscando despertar a curiosidade e a investigação matemática para melhorar sua compreensão.

### **Fundamentação Teórica**

#### **Aulas de Investigações Matemáticas**

Através das aulas de investigações matemáticas pretende-se que os alunos se submergem no seu processo de ensino e de aprendizagem por meio da participação ativa e da gestão autônoma, sendo assim responsável desse processo. Atualmente, é importante que os alunos sejam confrontados com atividades de investigação durante a sua aprendizagem, sendo pela vivência de processos característicos de investigação, ou pelas atividades que os permitam novos desafios.

Conceito de investigação matemática, como atividade de ensino e de aprendizagem, subsidia a trazer para a sala de aula o espírito de atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões, conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e o professor (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2009, p. 23).

Segundo Ponte; Brocardo; Oliveira (2009), as investigações matemáticas são um tipo de atividades que todos os alunos deveriam conhecer, permitindo ao aluno saber como o seu desempenho é visto pelo professor se existem aspectos que se precise dar mais atenção.

Em sua teoria da constituição do sujeito, Vygotsky (1998) afirma que esta ocorre nas interações sociais produzidas nos diversos núcleos de ação. Com base em pressupostos histórico-culturais pode-se afirmar que o processo de elaboração de conhecimentos constitui-se na dinâmica interativa das relações sociais. É interagindo com o outro que cada indivíduo se constitui e se dá a elaboração conceitual. O sujeito social está em processo de formação constante e nestas dinâmicas interativas, a que se considerar a multiplicidade de saberes existente.

Segundo o grande estudioso da seara social, é na interação entre as pessoas que em primeiro lugar se constrói o conhecimento que depois será intrapessoal, ou seja, será partilhado pelo grupo junto ao qual tal conhecimento foi conquistado ou construído.

#### **Sobre a Investigação**

Neste artigo apresentamos parte de uma investigação na qual destacamos a análise da aplicação de duas atividades realizadas e discutidas em dois blocos, sendo o primeiro bloco de

três aulas seguidas de sessenta minutos e o segundo bloco duas aulas de 60 minutos. Expomos os objetivos, metodologia utilizada no estudo, instrumentos, sujeitos e local da investigação.

### **Objetivos**

Foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Analisar a capacidade dos alunos em realizar investigações;
- Investigar capacidade de promover atitudes, tais como de liderança e postura investigativa;
- Analisar a capacidade de trabalhar em grupo;
- Identificar habilidades no domínio dos conceitos da contagem;
- Analisar e comparar os indicadores de desenvolvimentos dos alunos.

### **Metodologia da Pesquisa**

Cury (2007) recomenda que uma análise qualitativa das respostas dos alunos, com uma discussão aprofundada sobre as dificuldades por eles apresentadas, apoiadas em investigações já realizadas é, talvez, a melhor maneira de aproveitar os erros para questionar os estudantes e auxiliá-los a estabelecer seu conhecimento.

Dessa forma, com o objetivo de contribuir neste processo de sintonia intelectual, este estudo segue uma perspectiva qualitativa, buscando, conceituar através de atividades investigativas as atividades desenvolvidas por estudantes de 2ª série do Ensino Médio do Instituto Federal do Tocantins no processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória.

Nas palavras de Bogdan e Biklen (1996, p.49) “A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a idéia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do objeto de estudo”.

Nesta perspectiva, optou-se por utilizar o caminho metodológico estabelecido por Ponte (2009) e também a metodologia para análise de dados tomando como base a análise de conteúdo proposta por Bardin (1979), o qual considera as seguintes etapas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

A presente investigação foi desenvolvida no laboratório de informática, podendo os alunos utilizar o editor de texto, o universo da pesquisa foram de 23 discentes, fracionados em grupos de 4 ou 5 alunos da turma 2ª série do Ensino Médio do Instituto Federal do Tocantins.

A partir da abordagem de investigação matemática no ensino de Análise Combinatória, buscamos verificar se a aprendizagem teria sido mais significativa, de forma que o aluno pudesse transferir os conceitos aprendidos naquela situação de ensino para outros contextos ainda, mais complexos. Assim, buscou-se atentar a novos elementos que poderiam emergir durante o estudo.

### **Instrumentos da Investigação**

A investigação foi realizada em cinco blocos, cada um com duas aulas de 60 minutos, considerando a elaboração e análise das atividades que se configuram como instrumentos de investigação, no qual foram separados em etapas. Neste artigo analisamos os dois primeiros blocos de atividades.

### Primeiro Bloco

Fora colocado para os alunos pesquisadores que eles deveriam segregar-se em grupos de quatro pessoas e debaterem com os colegas do grupo sobre qual raciocínio/mecanismo iria utilizar para resolver as atividades que seriam propostas neste bloco de aulas, bem como nos outros quatro. Assim que foram entregues as atividades do bloco, procuramos clarificar o significado de alguns termos e certificarmo-nos que todos os alunos a tinham entendido. Eles discutiram então que estratégias poderiam utilizar. Fora explanado que se tratava de questões de raciocínio lógico e deveriam consultar os colegas do grupo. Neste bloco utilizaram-se três aulas de sessenta minutos, os alunos estavam envolvidos com a atividade e prosseguimos com as discussões, sendo adicionada uma aula neste dia. Ao final da aula recolhemos as atividades, apenas um grupo não havia concluído o raciocínio e marcamos devolver para que pudessem continuar na próxima aula.

#### Atividade proposta no primeiro bloco

Fazer anagramas com as letras de uma palavra é misturá-las de forma diferente, ainda que a palavra formada não tenha um significado. Por exemplo: **ROMA, MORA, MARO, MRAO**, são anagramas da palavra **AMOR**. Desta forma, construa anagramas com as letras da palavra **BIA**.

a) Após o termino (dos anagramas com as letras da palavra **BIA**, b) faça também para as letras da palavra **AMOR**, c) Para finalizar veja quantos anagramas tem as letras da palavra **LAPIS** e digam se existe alguma relação entre as respostas dos três anagramas solicitados.

### Segundo Bloco

Buscou-se relacionar as atividades anteriores com as do segundo bloco, procurando assim conceituar o principio fundamental da contagem através das atividades de investigação.

#### Atividade proposta no primeiro bloco

01) Cinco cavalos disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os quatro primeiros lugares?

02) Helio Ricardo tem 5 blusas diferentes e 3 calças jeans diferentes. De quantos Modos diferentes ele pode se vestir, usando uma de suas calças e uma de suas blusas?

03) Vamos agora pensar, quantas diferentes placas de carro podem ser confeccionadas considerando uma seqüência de 3 letras e 4 números?



Figura 1. Atividade proposta no primeiro bloco.

### Análise e discussão dos resultados

#### Questão 1 do primeiro Bloco

01) Fazer anagramas com as letras de uma palavra é misturá-las de forma diferente, ainda que a palavra formada não tenha um significado. Por exemplo: **ROMA, MORA, MARO, MRAO**, são anagramas da palavra **AMOR**. Desta forma, construa anagramas com as letras da palavra **BIA**.

a) Após o termino ((dos anagramas com as letras da palavra BIA, b) faça também para as letras da palavra AMOR, c) Para finalizar veja quantos anagramas tem as letras da palavra LAPIS e digam se existe alguma relação entre as respostas dos três anagramas solicitados.

**Desenvolvimento da atividade:**

Enfatizamos algumas discussões dos alunos ao iniciar as atividades.

Aluno k: “Já apaguei varias vezes... não dá para fazer de qualquer jeito. Tem que uma regra...”

Aluno A: “Professor não tem uma fórmula para resolver isso? Na matemática sempre tem fórmula...”

Aluno Z “Professor deve ter um macete, porque se fossem muitas letras? E sei que tem, tem que ter”

Para esta atividade destacamos as respostas de três grupos.

**Grupo X:**

The image shows handwritten student work for Group X. It consists of two main parts. The first part is for the word 'BIA'. It shows a 6x3 grid of letters: B, I, A. Below this, there are six rows of anagrams: BIA, BAI, IBA, IAB, AIB, and ABI. The second part is for the word 'AMOR'. It shows a 6x6 grid of letters: A, M, O, R. Below this, there are six rows of anagrams: AMOR, AMRO, AOMR, AORM, AMRO, and AMRO. The third part is for the word 'LAPIS'. It shows a 6x5 grid of letters: L, A, P, I, S. Below this, there are six rows of anagrams: LAPIS, LAIP S, LAI S P, LAI P S, LAS I P, and LAS P I. To the right of the grids, there is handwritten text explaining the calculation: 'Começando com a tem 6 possibilidades, então terá mais 6 começando com M, O R ai fica um total de 6+6+6+6=24'. Below that, it says 'São 6 possibilidades com LA, então são 6 com LI, LP e mais 6 com LS, então tem 24 possibilidades começando com L e outros 24 com A, P, I, S ai fica 24+24+24+24+24 = 120'.

Figura 2. Discursões dos alunos do Grupo X.

**GRUPO Y:**

“A palavra BIA tem três letras e 6 anagramas, a palavra AMOR tem quatro letras e 6 possibilidades começando com cada letra, mesma quantidade de anagramas de uma palavra com três letras. Como AMOR tem 24 anagramas, sendo assim pelo que observamos a palavra LAPIS que tem cinco letras, seguirá o mesmo raciocínio e terá 120 anagramas, pois serão 24 possibilidades para cada letra. Quando aumentamos uma letra

diferente, o numero de possibilidades para cada letra, é mesma do total de anagramas da palavra anterior”

**GRUPO H:**

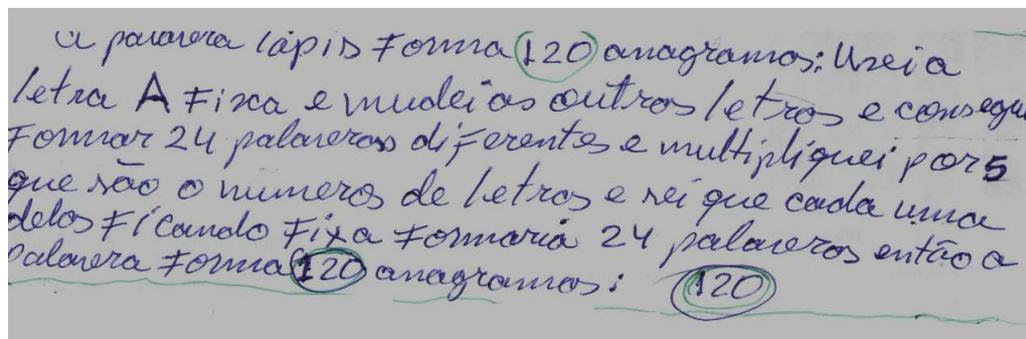


Figura 3. Discursões dos alunos do Grupo H.

**Análise do Primeiro Bloco**

Percebeu-se que os alunos sempre queriam formar os grupos com os colegas que julgam mais “esertos”, assim demoramos um pouco na divisão dos grupos, uma vez que intervir um pouco para garantir a participação de todos. Em alguns momentos buscavam o suporte do professor nas resoluções, mas sempre as orientações forma no sentido de despertar a busca pela investigação e não apontar as respostas. Devo destacar que alguns gostariam que a atividade fosse avaliativa, assim poderiam fazer com mais entusiasmos. Sendo assim que todos devem ser avaliados todos os dias, inclusive o professor, pelos alunos.

Desta forma, terminada a aula, foi então um momento de reflexão sobre o modo como esta tinha decorrido e, apesar de considerar que a gestão do tempo não tinha sido a melhor, fez-se um balanço positivo, uma vez que todos os alunos trabalharam com entusiasmo, participação, colaboração e com espírito investigativo.

Para melhor descrever esta experiência, fora feito um acompanhamento, uma espécie de relatório com as mais relevantes características da experiência, com enfoque no que indicaram ao tentar resolver as atividades e também foram registradas as soluções para que pudessem avaliá-las com calma.

**Quadro 1**

Análise das respostas dos grupos no primeiro bloco.

Grupo X	Os alunos encontraram a resposta da quantidade de anagramas da palavra LÁPIS, pelo principio aditivo, fixaram uma letra e perceberam que a quantidade de possibilidades para as demais eram os mesmo, assim somaram as possibilidades de cada letra. Percebe-se que o grupo não calculou todas as possibilidades começadas com a letra “L” analisaram apenas LA e verificaram que L com as demais letras seriam seis possibilidades também, assim verificaram que os anagramas começando em L seriam 24 possibilidades. Assim não escreveram todos como fizeram as letras da palavra BIA.
Grupo Y	Estes alunos foram surpreendentes nesta questão, uma vez que fizeram analogia dos anagramas das palavras, BIA, AMOR e LAPIS. Afirmando que a quantidade de possibilidades de uma letra é exatamente o numero de anagramas da palavra anterior que tenha menos uma letra. Perceberam que BIA, tem seis anagramas, então cada letra da palavra AMOR tem 6 possibilidades, chegando assim a 24 anagramas pois tem 4 letras. Seguindo o

	mesmo raciocínio a palavra LAPIS teria então 24 possibilidades para cada letra e somando todas teríamos 120 anagramas. Foi uma grata surpresa este raciocínio para mim, naquele momento.
Grupo H	O grupo fixou a letra A e chegou aos 24 anagramas, perceberam que seriam mais 24 anagramas com as outras letras, então fizeram a multiplicação de 24 com a quantidade de letras. Optamos em não colocar os 24 anagramas começando A, uma vez que a resolução do grupo ficaria extensa no trabalho.

Diante das respostas dos alunos, entendemos que o princípio multiplicativo e aditivo não estavam presente para a maioria dos alunos, acreditamos que eles não tiveram contato com problemas análogos durante o Ensino Fundamental. Percebemos também que alguns deles fizeram tentativas de apresentar o cálculo já que sabiam o resultado passado por outro grupo, assim seus integrantes não conseguiram explicar o raciocínio quando foram questionados. Outro fator interessante foi a rapidez que os mesmos buscavam chegar às respostas, sem antes fazerem uma avaliação mais detalhada do problema.

Percebemos que todos os alunos interferiram com frequência, manifestando opinião, todos participaram na elaboração da conjectura do assunto, buscando sempre uma solução rápida as questões. Devemos destacar que, as características apresentadas pelos vários grupos não eram muito divergentes, alguns se sobressaiam nas hipóteses, algumas vezes acabam repassando para algum grupo ao lado, assim surgiam às conjecturas de cada grupo e algumas divergências de opiniões.

### Questão 1 do Segundo Bloco

Essas questões foram elaboradas com o objetivo de introduzir o conceito de princípio fundamental contagem, observando o número de possibilidades, buscando despertar nos alunos as relações existentes nas questões anteriores.

- 01) Cinco cavalos disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os quatro primeiros lugares?

Para esta atividade destacamos as respostas de três grupos.

#### GRUPO B:

“Se eu representar cada cavalo por uma letra, ficam 24 possibilidades para cada letra para cada letra, 24 vezes 4 dá 96.”

#### GRUPO C:

“Não entendi direito mas deve ser 20,  $5 \times 4$ ”

#### GRUPO Z:



Figura 4. Discursões dos alunos do Grupo Z.

### Questão 2 do Segundo Bloco

Helio Ricardo tem 5 blusas diferentes e 3 calças jeans diferentes. De quantos Modos diferentes ele pode se vestir, usando uma de suas calças e uma de suas blusas?

Novamente destacamos as respostas de três grupos.

#### GRUPO K:

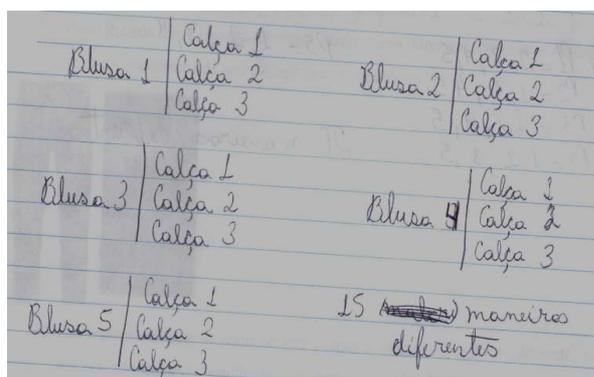


Figura 5. Discursões dos alunos do Grupo K.

#### GRUPO L:

*“Pode-se usar de 15 maneiras diferentes”*

#### GRUPO T:

*“Se fixarmos uma blusa e testarmos as possibilidades para as calças ficam assim, 05 cinco possibilidades para cada calça. Ai quando faço para todas as calças ficam  $5 \times 3 = 15$  possibilidades.”*

Ainda no segundo bloco, colocamos uma 3ª questão com o intuito de fazê-los perceber a necessidade de calcular a quantidade de diferentes placas que podem ser confeccionadas com todas as letras do alfabeto e todos os algarismos do nosso sistema de numeração, pois representá-las como fizeram nas questões anteriores seria muito trabalhoso.

### Questão 3 do Segundo Bloco

Vamos agora pensar, quantas diferentes placas de carro podem ser confeccionadas considerando uma seqüência de 3 letras e 4 números?



Figura 6. Placa de carro.

Destacamos algumas respostas:

#### GRUPO I:

*“ $3 \times 4 = 12$  não pode ser apenas isso”.*

#### GRUPO W:

*“(26 + 26 + 26) + 10000 = 1078 Acho pouco ainda”*

#### GRUPO Y (este é o mesmo Grupo Y anterior):

No exercício das blusas multiplicamos as possibilidades, então para cada posição das letras temos 26 possibilidades ( $26^3 = 17576$ ), então há 17576 possibilidades para as letras. Para os números são 10<sup>3</sup>, que são 1000, que são dez mil possibilidades para os números. Logo vamos fazer como fizemos com o exercício das blusas.  $17576 \times 10000 = 175760000$  possibilidades.

Figura 7. Resposta do Grupo Y.

Ao final da aula, as atividades foram recolhidas com as respostas e discutimos um pouco sobre o último exercício, a importância dele em aplicações como números de CPF e telefones.

Alguns alunos começaram a fazer indagações no sentido de ter utilizado este mesmo raciocínio nas questões da aula anterior.

#### Quadro 2

Análise das respostas dos grupos na questão 1 do segundo bloco.

Grupo B	Percebe-se que os alunos se atentaram para as 24 possibilidades, mas confundiram na análise quanto aos quatro primeiros lugares, pois deveriam observar que se tratava de cinco cavalos sendo 24 possibilidades para cada, sendo assim 120 o número de total de possibilidades.
Grupo C	Quanto a este grupo, percebe-se que começaram a buscar soluções que vem do princípio fundamental da contagem, embora os fizesse de forma inadequada, pois analisaram quatro possibilidades vezes cinco possibilidades e afirmaram um total de 20. Os próprios membros do grupo desconfiaram da resposta, por acreditar ser um valor muito baixo.
Grupo Z	O grupo fez uma analogia com a atividade dos anagramas e perceberam que para o primeiro lugar, era o mesmo caso dos anagramas começando em A, assim fixando um animal e primeiro teriam 24 possibilidades, somado as outras 24 de cada cavalo seriam 25 vezes cinco e assim teriam 120 possibilidades.

#### Quadro 3

Análise das respostas dos grupos na questão dois do segundo bloco.

Grupo K	O grupo escreveu todas as possibilidades reais com cada blusa e percebeu que se tratava de 15 possibilidades o total.
Grupo L	Este grupo já foi mais além e percebeu que se tratava uma questão de lógica, três possibilidades para todas as calças e cinco para blusa, assim bastava multiplicar $3 \times 5 = 15$ .
Grupo T	O grupo fixou uma blusa e utilizou o mesmo raciocínio dos anagramas. Percebendo assim que seriam cinco possibilidades para calça, assim somados ficaram $5 \times 3 = 15$ .

#### Quadro 4

Análise das respostas dos grupos na questão 3 do segundo bloco.

Grupo I	O grupo fez analogia com a questão dois e não conseguiram responder corretamente.
Grupo W	Este grupo se aproximou bastante da resposta, porem somou as possibilidades, sendo que deveriam multiplicar. Mas o raciocínio inicial foi muito bom.
Grupo Y	Este grupo novamente surpreendeu com o raciocínio lógico e respondeu corretamente a questão.

Percebemos que alguns erros cometidos pelos grupos desta pesquisa, foram elencados em Pereira Filho (2012) em duas categorias: uso errado dos dados e erro devido à falsa generalização. Destaca-se, ainda, que um dos maiores problemas encontrados refere-se à

tranquilidade em interpretar os dados dos problemas e resolver com paciência, sem pressa para encontrar e não buscar uma solução de imediato para a atividade.

Os autores consideram ainda que analisar e classificar os erros cometidos pelos estudantes confirma a necessidade de engajá-los em atividades que propiciem o desenvolvimento de habilidades e competências, de acordo com as deficiências detectadas, possibilitando assim uma adequação recíproca dos alunos, que podem melhorar o seu desempenho em sala de aula, e dos professores, na efetivação de sua própria missão como educador e na busca da prática de um ensino eficiente.

Pereira Filho (2012), a partir de uma categorização e análise de erros nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, sugere que o estudo de erros possa ser considerado uma ferramenta de prevenção.

Após análise das respostas dos grupos, considera-se que as dificuldades dos estudantes estão relacionadas principalmente à interpretação dos dados de um problema, ler o problema a ser resolvido com bastante atenção, bem como criar sua própria maneira de incidir os problemas de contagem.

### **Considerações finais**

Na presente investigação, para analisar os dados advindos da realização do teste e as avaliações foi empregada a metodologia de análise do conteúdo das respostas, apresentada em Cury e Cassol (2004). A autora propõe uma metodologia tomando como base as etapas da análise de conteúdo proposta por Bardin (1979): pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Assim, seguindo os pressupostos estabelecidos pela autora, na primeira fase, as respostas coletadas foram organizadas, para escaneamento ou digitação, conforme a possibilidade. Para cada questão, as respostas formaram, então, o material sobre o qual foi feita a análise. A seguir, as respostas foram corrigidas para analisar, quantitativamente.

A fase de exploração do material envolveu o processo de unitarização e classificação das respostas, no qual o material foi lido mais uma vez para definir as categorias. Nesta pesquisa, os critérios de classificação foram determinados a partir do próprio material em que os dados semelhantes foram agrupados.

Já na fase de tratamento dos resultados, as categorias de respostas são descritas por meio de figuras ou tabelas de distribuição de frequências ou com a produção de “um texto-síntese, que permita ao leitor a compreensão do significado da classe, em geral com o apoio de exemplos retirados do próprio corpus” (Cury, 2007, p. 65).

Na pesquisa, durante a aplicação das atividades, percebemos que os alunos sentem-se motivados a resolver problemas quando eles devem tomar as decisões. Ficou claro que a interferência do professor em alguns momentos é muito importante, pois os alunos mais seguros de suas idéias buscam entusiasmados encontrar as soluções.

Enquanto discutiram as possibilidades que pretendiam utilizar para resolver as atividades, formularam hipóteses e procuraram consenso, buscavam apoio em dos colegas em suas ideias, os alunos envolveram-se em experiências favoráveis ao desenvolvimento de competências no âmbito da comunicação e argumentação e ao seu próprio desenvolvimento pessoal. A necessidade de defender as suas idéias e de confrontá-las com as opiniões dos outros fomentou o

desenvolvimento de hábitos de reflexão e de capacidade críticas, tão importantes para o exercício de uma cidadania ativa e responsável.

Devemos destacar que as atividades foram realizadas sem a utilização das fórmulas as quais tanto assustam nossos alunos, mas através do uso constante do princípio multiplicativo e do número de permutações dos elementos de um conjunto. Acreditamos que o ensino desse conteúdo realizado dessa forma é muito mais interessante e estimulante tanto para os docentes como para os discentes.

Acredita-se que os resultados obtidos com a pesquisa, especialmente as reflexões geradas, podem servir de base para futuras propostas de trabalho, as quais considerem as investigações matemáticas em sala de aula, realizadas pelos estudantes, como caminho para a construção de conhecimentos. Entende-se que os resultados obtidos, além de sinalizarem oportunidades para a elaboração de estratégias de ensino, foram capazes de fornecer ao próprio professor a possibilidade de uma reflexão quanto à metodologia de ensino adotada, oportunizando ao educador adotar a investigação no processo diário de ensino da disciplina de Matemática, Estatística, além das demais disciplinas.

Por fim, tem-se a certeza de que esta experiênciapôde enxergar algumas das potencialidades das investigações matemáticas não apenas como forma de ensinar os conteúdos, mas como modo excepcional de pôr em prática um ensino verdadeiramente integrado, proporcionando aos alunos contextos de aprendizagem significativa, onde estes podem discutir temas interessantes ao mesmo tempo em que aprendem e treinam procedimentos matemáticos. A forma entusiasta como todos os alunos aderiram a esta tarefa proporcionou uma reflexão sobre a prática docente, onde, contrariamente às orientações curriculares mais recentes. Outros estereótipos foram colocados à luz do sistema de ensino, pois era demasiado o tempo no treino repetitivo, isolado e sem significado de procedimentos.

### **Referências**

- Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.
- Brasil, Ministério da Educação. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1996). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Cury, H. N. (2007). *Análise de erros: o que podemos aprender com as repostas dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Pereira Filho, & Albano Dias. (2012). *Análise de erros produzidos por estudantes de um curso de engenharia civil na disciplina de cálculo Diferencial e integral I* (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Luterana do Brasil, ULBRA: Rio Grande do Sul, 2012.
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2009). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula* (2ª ed.). Belo Horizonte: Autêntica.
- Vazquez, C. M. R., & Malagutti, P. L. (2009). *Atividades Experimentais de Análise Combinatória no Ensino Médio em uma Escola Estadual*.
- Vygotsky, L. S. (1998). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. São Paulo: Martins Fontes.