



Simulación de variables aleatorias discretas utilizando Excel

Greivin **Ramírez** Arce
Escuela de Matemática, Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica
gramirez@itcr.ac.cr
Kendall **Rodríguez** Bustos
Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica
kendall2412@gmail.com

Resumen

El taller pretende mostrar estrategias de simulación, tanto físicas, como computacionales con el uso de Excel, de variables aleatorias discretas; partiendo desde el diseño de la distribución, el desarrollo repetitivo de experimentos, su representación gráfica hasta el cálculo de probabilidades de forma frecuencial. Los participantes podrán utilizar material manipulativo para analizar el comportamiento de casos individuales, así como el computador para inferir patrones y generalizar resultados en la solución de problemas estocásticos. Las técnicas empleadas serán de eliminación, eliminación-adición y repetición.

Palabras clave: simulación, variables aleatorias discretas, Excel, distribuciones de probabilidad, resolución de problemas.

Introducción

Existe un acuerdo casi universal entre los investigadores de estocástica y su didáctica, que las simulaciones en computadora, las hojas de cálculo y el uso de las computadoras para conducir el Análisis Exploratorio de Datos (AED) y resolver problemas estocásticos de manera frecuencial, son las direcciones hacia donde debe estar orientando la educación estocástica (Shaughnessy, 2002; Burrill, 2002; Ben-Zvi & Garfield, 2004; Inzunza, 2006; Sanabria, 2013). Sin embargo, la creación de la distribución para empezar a realizar el proceso de muestreo no es sencilla a la hora de simular, de hecho es quizás la etapa clave que permite llegar a la solución de problemas estocásticos.

Se concuerda plenamente con el uso de la tecnología, tal y como es planteada en muchos

currículos a nivel mundial, entendiendo su uso para disminuir los cálculos tediosos o rutinarios con el fin de concentrarse en los procesos de razonamiento o de aplicación más significativos, además de utilizarla como instrumento para obtener representaciones múltiples de datos (MEP, 2012).

Sin embargo, es importante previo al uso de la tecnología, que los estudiantes manipulen con material concreto (ya sean dados, cartas, monedas, entre otros) la situación planteada en el problema, como lo manifiesta Ramírez (2013):

La simulación, primero física, permite que el estudiante se enfrente a la situación real del problema, con el fin de que empiece a observar el comportamiento de algunos experimentos, más tarde, la simulación computacional, permitirá inferir patrones, debido a la gran cantidad de experimentos que se pueden crear, manipulando parámetros y variando las condiciones del problema inicial. (pp.700-701).

Se propone, como estrategia metodológica en el taller, incorporar la simulación física y computacional, en la construcción de distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas a través de problemas no triviales.

Para la simulación computacional se utiliza Excel que es un paquete dinámico que permite al usuario realizar simulaciones a través de su aporte funcional y gráfico. Además, es un paquete de fácil acceso para todo usuario en cualquier sistema operativo.

Aspectos teóricos

Algunos aspectos teóricos que son fundamentales conocer para desarrollar las actividades propuestas son los siguientes:

Probabilidad frecuencial de un evento A

Se define como:
$$P(A) = \frac{\text{núm de experimentos donde el evento A ocurre}}{\text{núm total de experimentos realizados}}$$

Ley de los grandes números

Dado un experimento, sea A un evento y $X(n)$ el número de veces que ocurre A en n de estos experimentos, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que: $P\left(\left|\frac{X(n)}{n} - P(A)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$, para n lo suficientemente grande.

Muestreo aleatorio con reemplazo

Consiste en la extracción de una muestra aleatoria donde un elemento puede ser seleccionado cada vez que se haga la extracción. En este tipo de muestreo la probabilidad de que un elemento sea seleccionado en cada experimento se mantiene constante.

Muestreo aleatorio sin reemplazo

Consiste en la extracción de una muestra aleatoria donde una vez que un elemento ha sido seleccionado, éste no puede volver a formar parte del espacio muestral para la nueva extracción.

Variable aleatoria

Es una función de un espacio muestral Ω asociado al conjunto de los números reales.

Variable aleatoria discreta

X es una variable aleatoria discreta si y sólo si su rango es finito o infinito numerable.

Función de distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta

Si X es una variable aleatoria discreta, la función $f_X: R_X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_X(k) = P(X = k)$ se llama función de probabilidad de la variable aleatoria X .

Actividades

Problema 1. Dos bombillos defectuosos se mezclan con tres buenos. Se seleccionan uno a uno al azar y sin reposición hasta encontrar los dos defectuosos. Sea X el número de bombillos defectuosos. Determine la función de probabilidad de X .

Simulación física

Se recomienda insertar cinco canicas en una bolsa o urna, de tal manera que sean dos de un color (representan los bombillos defectuosos) y tres de otro color (representan los bombillos en buen estado). Los siguientes pasos permiten la simulación física:

Realizar el experimento de extraer canicas (bombillos), sin reposición, hasta obtener los dos defectuosos y contabilizar el número de extracciones que debió realizar para lograrlo.

Volver a poner las canicas en la caja y repetir el paso anterior.

De los n experimentos que realiza, hallar en cuántos de ellos se obtuvo los dos defectuosos en las dos primeras extracciones, el cociente será $P(X = 2)$

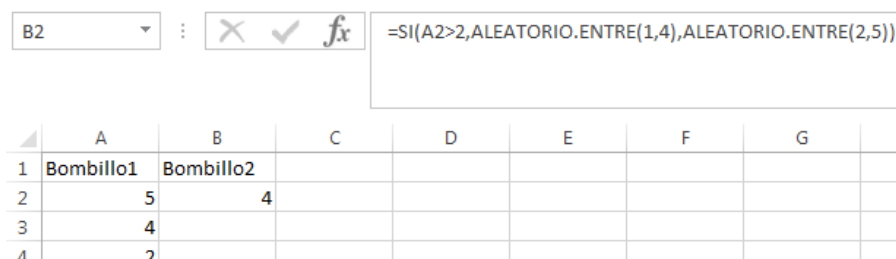
Se obtienen las otras probabilidades para terminar de obtener la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X .

Simulación en Excel

Para realizar la simulación se toma valores enteros aleatorios entre 1 y 5, donde 1 y 2 representan los bombillos defectuosos, mientras que 3, 4 y 5 representan los bombillos en buen estado. Estas técnicas de simulación se le llama de repetición y eliminación, primero porque habrá que lanzar el dado repetidamente, sin reposición, hasta que ocurran los dos defectuosos, y segundo ir eliminando los valores del dado que representan los bombillos según los resultados obtenidos. Se presenta a continuación una posible simulación:

Se crea una variable en la primera columna llamada “Bombillo1” que se le asigna el comando: `=ALEATORIO.ENTRE(1,5)`

Se crea otra variable en la segunda columna llamada “Bombillo2” que se le asigna: `=SI(A2>2,ALEATORIO.ENTRE(1,4),ALEATORIO.ENTRE(2,5))`



The screenshot shows the Excel interface. The formula bar at the top displays the formula `=SI(A2>2,ALEATORIO.ENTRE(1,4),ALEATORIO.ENTRE(2,5))` for cell B2. Below the formula bar is a table with 7 columns labeled A through G and 4 rows. Column A is labeled 'Bombillo1' and column B is labeled 'Bombillo2'. The data in the table is as follows:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Bombillo1	Bombillo2					
2	5	4					
3	4						
4	2						

Figura 1. Paso 2 de simulación en Excel.

Es aquí donde se muestra la técnica de eliminación, pues aunque los bombillos en cada estado no son distinguibles, si se obtiene un valor mayor que dos, entonces se sabe que como salió uno en buen estado, sin importar cuál sea (entre 3, 4 y 5), ahora lo que importará es que quedan dos bombillos defectuosos (el 1 y el 2) y dos buenos (se tomarán como el 3 y 4). En caso contrario, si sale algún valor entre 1 o 2, sabemos que se obtuvo uno defectuoso, así que sin importar cuál sea (1 o 2), lo que interesará es que queda sólo uno defectuoso (el 2) y los tres en buen estado (3, 4 y 5).

Se crea en la tercera columna otra variable llamada “Bombillo3” que se le asigna:
`=SI(Y(A2<3,B2<3),"F2",SI(O(Y(A2<3,B2>2),Y(A2>2,B2<3)),ALEATORIO.ENTRE(2,4),ALEATORIO.ENTRE(1,3)))`

Nuevamente con la técnica de sustitución, en caso de que los dos primeros hayan sido defectuosos (menos que 3), entonces se asigna “F2” que significa que los bombillos defectuosos se obtuvieron en las dos primeras extracciones. En caso que sólo se haya obtenido un bombillo defectuoso en las dos primeras extracciones (por tanto uno bueno también), entonces se elige un aleatorio entre 2 y 4, pues eliminamos cada extremo (uno bueno y uno malo), en caso contrario entonces quedarán dos defectuosos y uno bueno, por lo que se elige un aleatorio entre 1 y 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Bombillo1	Bombillo2	Bombillo3									
2	5	4	1									
3	1	2	F2									

Figura 2. Paso 3 de simulación en Excel.

Se crea otra variable llamada “Bombillo4” que se le asigna:
`=SI(C2="F2","F2",SI(O(Y(A2<3,C2<3),Y(B2<3,C2<3)),"F3",SI(Y(A2>2,B2>2,C2>2),"F5",ALEATORIO.ENTRE(2,3))))`

La técnica es la misma, sólo se debe notar que en caso de que se haya obtenido los dos defectuosos en las dos primeras extracciones, entonces a esta condición se le sigue asignando “F2” con el objetivo de llevar registro que ya no se debe lanzar más el dado, sino más bien tener presente que con la segunda extracción se acabó el experimento.

Se crea otra variable llamada “Bombillo5” que se le asigna:
`=SI(D2=3,"F5",SI(D2=2,"F4",SI(D2="F5","F5",SI(D2="F3","F3","F2"))))`

Se arrastran cada una de estas fórmulas hasta realizar 1000 experimentos (hasta la fila 1001)

Se crea una nueva columna llamada “Numextracciones” que nos permitirá contar en cada experimento después de cuántas extracciones se obtuvo los dos bombillos defectuosos. Así:
`=SI(E2="F1",1,SI(E2="F2",2,SI(E2="F3",3,SI(E2="F4",4,5))))`

F2 :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Bombillo1	Bombillo2	Bombillo3	Bombillo4	Bombillo5	NumExtracciones		
2	1	5	3	2	F4	4		
3	2	4	2	F3	F3	3		
4	1	2	F2	F2	F2	2		
5	3	4	1	3	F5	5		
6	1	3	3	2	F4	4		
7	3	3	3	F5	F5	5		

Figura 3. Paso 7 de simulación en Excel.

Se encuentra la distribución de probabilidad de la variable X , calculando de los 1000 experimentos, el número de veces en los que se obtuvo los dos defectuosos en la segunda, tercera, cuarta o quinta extracción.

Así, $P(X = 2)$ se obtiene como: $=\text{CONTAR.SI}(\text{E2:E1001}, "=F2")/1000$

Y en forma similar para las demás.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Bombillo1	Bombillo2	Bombillo3	Bombillo4	Bombillo5	NumExtracciones	$P(X=2)$	0.101
2	4	1	4	2	F4	4	$P(X=3)$	0.21
3	1	4	2	F3	F3	3	$P(X=4)$	0.284
4	2	2	F2	F2	F2	2	$P(X=5)$	0.405
5	1	5	4	3	F5	5		

Figura 4. Paso 8 de simulación en Excel.

1. Se grafica la distribución de probabilidad de X

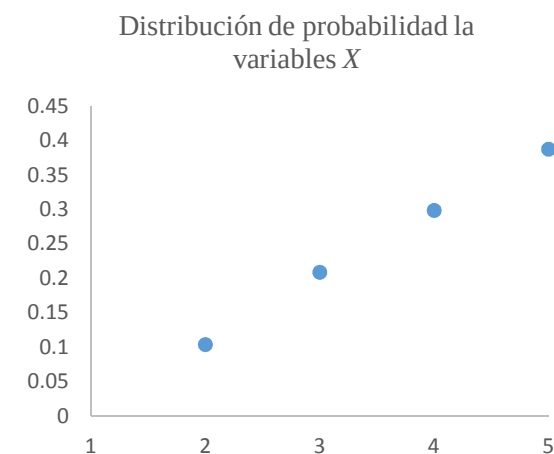


Figura 5. Paso 9 de simulación en Excel.

Solución teórica

El espacio muestral es

$\Omega = \{DD, BDD, DBD, DBBD, BDBD, BBDD, DBBBD, BDBBD, BBDBD, BBBDD\}$ y el rango es $R_X = \{2, 3, 4\}$

La distribución de probabilidad está dada por:

X	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3}$ $+ \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ $+ \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ $+ \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

Problema 2. En una canasta se tienen 3 bolas azules y 3 bolas rojas. Se comienza a sacar bolas al azar sucesivamente bajo las siguientes reglas:

Regla 1. Si la bola extraída es roja no se devuelve a la canasta y se agrega una bola azul a la canasta.

Regla 2. Si la bola extraída es azul se termina la extracción.

Si X es la variable que representa el número de extracciones realizadas hasta obtener la primera bola azul. Determine la distribución de probabilidad de X .

Simulación física

Para esta primera parte, consideramos seis bolas en una bolsa o una urna de tal manera que sean tres bolas de un mismo color y las otras tres de otro color. Los siguientes pasos permiten la simulación física, donde se realiza el proceso de extracción de bolas en forma aleatoria:

Realizar el experimento de extraer bolas, según las reglas planteadas en el problema, hasta obtener la primera bola azul y contabilizar el número de extracciones realizadas en el momento que obtiene la bola azul.

Regresar las bolas a la urna y repetir el experimento n veces.

De los n experimentos realizados, determinar en cuántos de ellos se obtuvo la bola azul en la primera extracción, el cociente $\frac{\# \text{ bolas azules en } 1^\circ \text{ extracción}}{n}$ será la probabilidad de que $X = 1$.

De la misma manera que en el paso anterior, se calculan las otras probabilidades para terminar de obtener la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X , donde el rango de X es $R_X = \{1, 2, 3, 4\}$.

Simulación en Excel

Para efecto de la simulación computacional, consideremos las bolas rojas como el conjunto de valores numéricos $\{1, 2, 3\}$ y las bolas azules como $\{4, 5, 6\}$.

El problema consiste en realizar extracciones de bolas en forma aleatoria hasta obtener la primera bola azul; en caso de obtener la bola azul en el primer intento, se termine el experimento, según la regla 2.

La variación del problema surge cuando la primera bola es roja, pues ahí rige la regla 1:

“Si la bola extraída es roja no se devuelve a la canasta y se agrega una bola azul a la canasta”, es decir, la cantidad de bolas azules y rojas puede variar según el color de bola extraída.

Para ello, se considera la siguiente estrategia para modelar el problema planteado cuando se obtiene una bola roja; basado en la regla 1: al conjunto inicial $\{1,2,3,4,5,6\}$ se le elimina el primer elemento (bola roja) y se le agrega una bola azul, en este caso, se adiciona el sucesor de último número del conjunto: 7 que fungirá como bola azul. En esto consiste la técnica de eliminación-adición.

Así, de la segunda a la tercera extracción el conjunto $\{2,3,4,5,6,7\}$ se modifica al conjunto $\{3,4,5,6,7,8\}$ en el caso de que las bolas obtenidas hasta el momento sean rojas y en un último caso, de la tercera a la cuarta extracción se tendría el conjunto $\{4,5,6,7,8,9\}$, donde se puede observar que es la última posibilidad de extracción, debido a que la canasta no tiene más bolas rojas, por lo que se obtendría una bola azul y por la regla 2; se termina la extracción. En la siguiente figura se muestra la estrategia explicada anteriormente para realizar la simulación computacional.

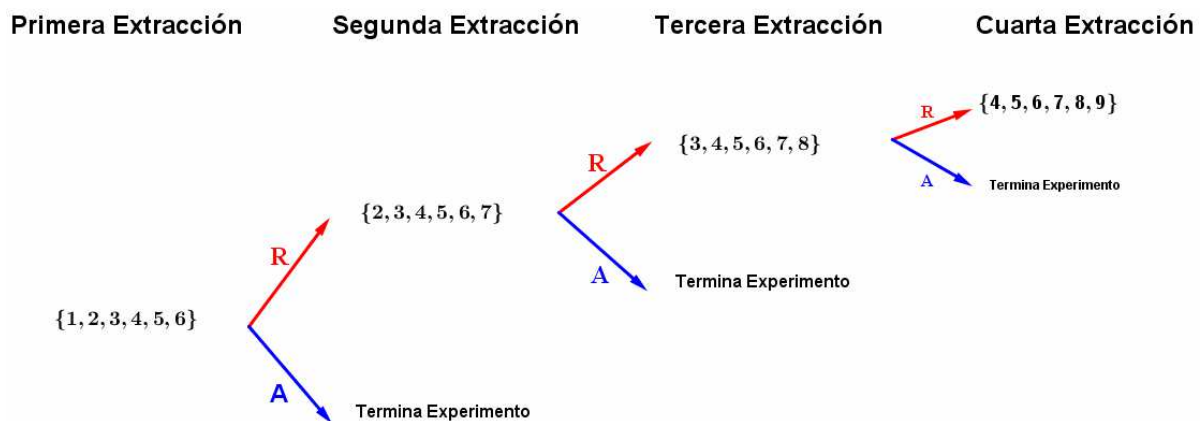


Figura 6. Estrategia para realizar simulación en Excel.

Se presenta a continuación una posible simulación del problema planteado:

Se crea una variable en la primera columna llamada “1° Extracción” que se le asigna el comando: `=ALEATORIO.ENTRE(1;6)`

Se crea una variable en la segunda columna llamada “2° Extracción” que se le asigna el comando: `=SI(A2<=3;ALEATORIO.ENTRE(2;7);" ")`

B2						
	A	B	C	D	E	F
1	1° Extracción	2° Extracción				
2	3	2				
3	2	4				
4	2	2				
5	5					
6	5					
7	1	3				

Figura 7. Paso 2 de simulación en Excel.

Se crea una variable en la tercera columna llamada “3° Extracción” que se le asigna el

comando $=SI(B2 \leq 3; ALEATORIO.ENTRE(3;8); " ")$.

En la cuarta columna se crea una variable llamada “4° Extracción”, para ello se utiliza el comando: $=SI(C2 \leq 3; ALEATORIO.ENTRE(4;9); " ")$.

Se arrastran cada una de estas fórmulas hasta realizar 1000 experimentos, en este caso, hasta la celda 1001 de cada columna.

Ahora interesa saber en cada uno de los experimentos, en cuál extracción se obtuvo la primera bola azul. Para ello, se crea una variable en la quinta columna llamada “NumExtracciones”, donde se utilizará el comando: $=SI(A2 >= 4; "1"; SI(B2 >= 4; "2"; SI(C2 >= 4; "3"; "4")))$ y se arrastra dicha fórmula hasta la celda 1001 de esa misma columna.

E2 : $=SI(A2 >= 4; "1"; SI(B2 >= 4; "2"; SI(C2 >= 4; "3"; "4")))$					
1	A	B	C	D	E
	1° Extracción	2° Extracción	3° Extracción	4° extracción	NumExtracciones
2	6				1
3	2	2	3		8 4
4	4				1
5	1	6			2
6	3	6			2
7	5				1
8	2	5			2

Figura 8. Paso 6 de simulación en Excel.

Por último, se crean las variables “Rango” y “Probabilidad”.

Para hacer el cálculo respectivo de cada probabilidad, se utiliza el comando: $=CONTAR.SI(E2:E1001; "1")/1000$. Y así sucesivamente se obtienen las otras probabilidades.

H2 : $=CONTAR.SI(E2:E1001; "1")/1000$							
1	A	B	C	D	E	F	G
	1° Extracción	2° Extracción	3° Extracción	4° extracción	NumExtracciones	Rango	Probabilidad
2	6				1	1 P(X=1)	0,526
3	2	6			2	2 P(X=2)	0,312
4	6				1	3 P(X=3)	0,135
5	6				1	4 P(X=4)	0,027
6	5				1		
7	4				1		
8	4				1		

Figura 9. Paso 7 de simulación en Excel.

Finalmente, se realiza la gráfica de la distribución de la variable aleatoria X

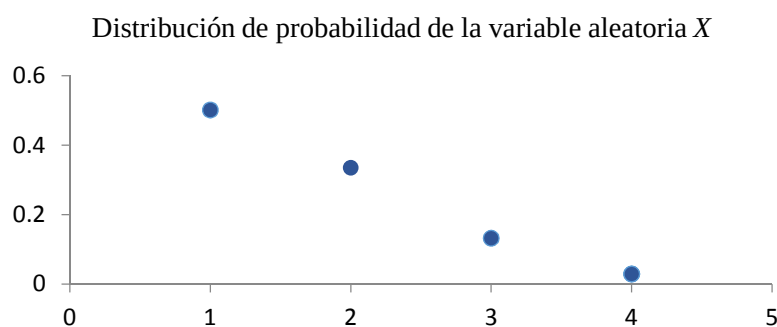


Figura 10. Paso 8 de simulación en Excel.

Solución teórica

El espacio muestral es $\Omega = \{A, RA, RRA, RRR A\}$.

El rango de la variable X es $R_X = \{1, 2, 3, 4\}$.

La distribución de probabilidad de la variable X está dada por:

X	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6}$	$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

Problema 3. Hernán y Ester lanza una moneda cada uno una única vez. Sea X el número de caras obtenidas. Según el número de caras obtenidas por Hernán y Ester será la cantidad de veces que Mariela lance un dado. Si Y es la variable que representa la cantidad de unos obtenidos por Mariela, determine la distribución de probabilidad de X y de Y .

Simulación física

Para la variable X

Los siguientes pasos permiten la simulación física:

Realizar el experimento de lanzar dos monedas y contar el número de caras obtenidas.

De los n experimentos que realiza, hallar en cuántos de ellos se obtuvo cero caras en los dos lanzamientos, el cociente será $P(X = 0)$

Se obtienen las otras probabilidades para terminar de obtener la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X .

Para la variable Y

Los siguientes pasos permiten la simulación física:

Según el número de caras obtenidas en cada experimento (de lanzar las dos monedas) de la simulación anterior, lanzar el dado tantas veces como caras obtenidas y contabilizar el número de unos que obtiene.

El cociente entre el total de unos obtenidos sobre el número n de experimentos que realiza será $P(Y = y)$. Se obtienen todas estas probabilidades para terminar de obtener la distribución de probabilidad de la variable aleatoria Y .

Simulación en Excel

Para la variable X

Para realizar la simulación se toman valores enteros aleatorios entre 0 y 1, donde el cero representa el “sol” y el 1 la “cara”. Se utiliza la técnica de repetición.

Se crea una variable en la primera columna llamada “MonedaHernán” y se le asigna: $=ALEATORIO.ENTRE(0,1)$

Se crea en la segunda columna otra variable llamada “MonedaEster” y se le asigna:
`=ALEATORIO.ENTRE(0,1)`

Otra variable se crea en la tercera columna llamada “CuentaCaras” y se le asigna:
`=A2+B2`, que representa el número de caras obtenidas en los dos lanzamientos.

	A	B	C
1	MonedaHernán	Moneda Ester	CuentaCaras
2	1	0	1
3	1	1	2
4	0	0	0
5	0	1	1

Figura 11. Paso 3 de simulación en Excel.

Se arrastran cada una de estas fórmulas hasta realizar 1000 experimentos (hasta la fila 1001)

Se encuentra la distribución de probabilidad de la variable X , calculando de los 1000 experimentos, el número de veces en los que ocurrió cero, una o dos caras.

Así, $P(X = 1)$ se obtiene como: `=CONTAR.SI(C2:C1001, 0)/1000`

Y en forma similar para las demás probabilidades.

	A	B	C	D	E
1	MonedaHernán	Moneda Ester	CuentaCaras		
2	1	0	1		
3	0	0	0		
4	1	0	1		
5	1	1	2	$P(X=0)$	0.246
6	1	1	2	$P(X=1)$	0.488
7	1	0	1	$P(X=2)$	0.266

Figura 12. Paso 5 de simulación en Excel.

Para la variable Y

A partir de la simulación anterior, se crea una nueva variable en la columna D llamada “Dado1” que se le asigna:

`=SI(C2=0,"",SI(C2=1,ALEATORIO.ENTRE(1,6),ALEATORIO.ENTRE(1,6)))`

Se muestra que si se han obtenido cero caras, entonces el dado no se lanza.

Se crea otra variable llamada “Dado2” que se le asigna:

`=SI(C2=0,"",SI(C2=1,"",ALEATORIO.ENTRE(1,6)))`

En caso de haber obtenido cero o una cara, entonces el dado no se lanza.

Se crea otra variable llamada “Cuentaunos” que se le asigna: `=CONTAR.SI(D2:E2,1)`

Formula bar: $=\text{CONTAR.SI}(\text{D2:E2},1)$

	A	B	C	D	E	F
1	MonedaHern	MonedaEste	CuentaCaras	Dado1	Dado2	Cuentaunos
2	1	1	2	1	2	1
3	0	0	0	0		0
4	1	1	2	1	1	2
5	0	0	0			0
6	0	1	1	5		0

Figura 13. Paso 8 de simulación en Excel.

Se encuentra la distribución de probabilidad de la variable Y , calculando de los 1000 experimentos, el número de veces en los que ocurrió uno el lanzamiento de los dos dados.

Así, $P(X = 0)$ se obtiene como: $=\text{CONTAR.SI}(\text{F2:F1001},0)/1000$

Y en forma similar para las demás probabilidades.

Formula bar: $=\text{CONTAR.SI}(\text{F2:F1001},1)/1000$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	MonedaHern	MonedaEste	CuentaCaras	Dado1	Dado2	Cuentaunos		
2	1	0	1	3		0		
3	0	1	1	1		1		
4	1	0	1	2		0		
5	1	0	1	2		0	$P(X=0)$	0.842
6	1	0	1	1		1	$P(X=1)$	0.154
7	0	0	0			0	$P(X=2)$	0.004

Figura 14. Paso 9 de simulación en Excel.

1. Se grafica la distribución de la variable Y

Distribución de probabilidad de la variable aleatoria Y

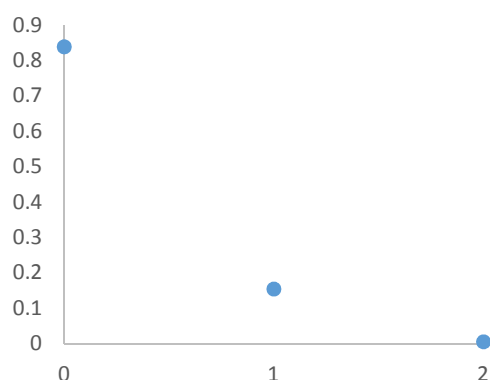


Figura 15. Paso 10 de simulación en Excel.

Solución teórica

Para la variable X

El espacio muestral es $\Omega = \{SS, CC, SC, CS\}$ y el rango es $R_X = \{0,1,2\}$

La distribución de probabilidad está dada por:

X	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Para la variable Y .

El rango de es $R_Y = \{0,1,2\}$

La distribución de probabilidad está dada por:

Y	0	1	2
	0 de 0 v 0 de 1 v 0 de 2	1 de 1 v 1 de 2	2 de 2
$P(Y = y)$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$
	$\frac{121}{144}$	$\frac{11}{72}$	$\frac{1}{144}$

Conclusiones

Se destaca la importancia de la introducción de simulaciones físicas y computacionales aplicadas a eventos probabilísticos en diferentes niveles educativos. Además, serán los discentes, los encargados de crear sus propios experimentos probabilísticos; generando sus poblaciones, tomando muestras y calculando las probabilidades para que obtengan sus conclusiones.

Esta propuesta didáctica evitará que los alumnos abarquen los aspectos teóricos desde un punto de vista abstracto, permitiendo la relación entre conceptos con la realidad cotidiana del individuo. Se busca, por medio de proyectos o laboratorios computacionales, promover el razonamiento creativo y crítico de los estudiantes en el momento en que se enfrentan a distintas situaciones o eventos aleatorios.

Por último se pretende que el participante, a través de herramientas mínimas de programación en Excel, pueda utilizar las técnicas vistas en la resolución de nuevos problemas probabilísticos y estos a su vez desarrollen sus propias estrategias de eliminación, eliminación-adición y repetición.

Referencias y bibliografía

- Ben Z-vi, D., & Garfield, J. (2004). Research on reasoning about variability: a forward. *Statistic Education Research Journal*, 3(2), 4-6.
- Burrill, G. (2002). Simulation as a tool to develop statistical understanding. En B. Phillips (Ed), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town South Africa.
- Inzunza, S. (2006). *Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica* (Tesis doctoral no publicada). CINVESTAV-IPN, México.

- Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Reforma Curricular en Ética, Estética y Ciudadanía. Programas de Estudio de Matemática*. I y II Ciclo de Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Diversificada. Informe Técnico. Ministerio de Educación Pública, San José, Costa Rica. Extraído el 01 de Agosto, 2014 en http://www.mep.go.cr/downloads/RecursosTecnologicos/Programas_matematica.pdf
- Ramírez, G., & Rodríguez, K. (2014). *Ejercicios Resueltos de Probabilidades* (2ª ed.). Cartago, Costa Rica: Publicaciones ITCR.
- Ramírez, G. (2013). Simulación física y computacional: estrategia metodológica para resolver problemas estocásticos. En *Memorias del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM)*. Montevideo, Uruguay.
- Sanabria, G. (2013). Simulación en Excel de variables aleatorias discretas. En *Memorias del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM)*. Montevideo, Uruguay.
- Shaughnessy, M. (1992). Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan Publishing Company.