



El espacio social de la clase como regulador del trabajo geométrico. Estudio de casos en la escuela secundaria

Ana María **Mántica**

Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral

Argentina

amantica@fhuc.unl.edu.ar

Resumen

Presentamos un estudio de la actividad de tres grupos de estudiantes de una escuela secundaria, sobre una secuencia enmarcada en el copiado de figuras, cuyo propósito es que conjeturen, validen y enuncien los criterios de congruencia de triángulos. Se analizan las interacciones con pares y las intervenciones del docente considerando los mensajes que contienen tres lados, dos lados y un ángulo o, un lado y dos o tres ángulos; a partir de registros realizados por un observador no participante, artefactos escritos y grabaciones en audio y video.

En algunos casos las constataciones empíricas les bastan, a los estudiantes, para afirmar sus conjeturas, en otros utilizan lo experimental, propiedades conocidas e incluso contraejemplos para fundamentar sus afirmaciones, es decir emplean algunas reglas del debate matemático. El docente, tanto responsabiliza al alumno de sus conjeturas, como omite los potenciales problemas que surgen de las formulaciones de los estudiantes.

Palabras clave: geometría, conjeturas, validación, congruencia de triángulos, interacciones

Introducción

El presente trabajo se enmarca en un proyecto de investigación cuyo objetivo es elaborar, implementar y analizar secuencias didácticas, en distintos niveles del sistema educativo, en las que los estudiantes formulen conjeturas y las validen en interacción con sus pares.

Se presenta el estudio de una secuencia realizada en una escuela secundaria de Santa Fe, enmarcada en una propuesta de dictado de figuras, en la que se pretende que los estudiantes conjeturen, validen y enuncien los criterios de congruencia de triángulos. Previamente realizaron una tarea que permitió enunciar la propiedad de desigualdad triangular de los lados de un triángulo.

Se conforman 8 grupos de 5 alumnos cada uno y se les solicita que dibujen en una hoja blanca un triángulo, y que redacten un mensaje para que el grupo receptor pueda construir uno igual.

El análisis que se presenta en este trabajo tiene que ver con el modo que los estudiantes se convencen y convencen a los demás de las conjeturas que formulan.

Características del estudio

Se presenta un estudio de tres casos. Según Cohen y Manion (1990) la mayoría de los estudios en educación son descriptivos, en los que se cuenta lo que ya ha ocurrido, a partir de observaciones a individuos, grupos, instituciones y materiales con el fin de describir, comparar, contrastar, analizar e interpretar las entidades y los acontecimientos que constituyen sus diversos campos de investigación. Se trata de describir como proceden los estudiantes al resolver una tarea, durante tres jornadas de trabajo. El propósito de la secuencia es que, como productores de conocimientos, enuncien los criterios de congruencia de triángulos.

La recolección de datos se realiza a partir del registro de un observador no participante. En el estudio de estos casos se observa a un grupo de estudiantes de segundo año, en particular se presentan en este trabajo tres grupos. El observador realiza un registro etnográfico de lo acontecido y además emplea grabadores de audio y cámara de video, elementos que se utilizan para reconstruir lo ocurrido en la clase, además de lo escrito en las carpetas y afiches. En este caso particular se registra la puesta en común de cada tarea, por lo que no se cuenta con la discusión que realizan los integrantes de los grupos para arribar a las primeras conclusiones o los acuerdos que realizan para redactar el mensaje que entregarán al otro grupo.

La secuencia fue acordada con el docente del curso, como también el modo de trabajo con el objetivo que los estudiantes sean productores de conocimientos a partir de la formulación y validación de sus conjeturas.

La tarea que se aborda en este estudio tiene como objetivo que los alumnos puedan determinar cuáles son las condiciones necesarias para construir un triángulo. Se solicita a cada grupo que dibuje en una hoja blanca un triángulo, y que redacte un mensaje para que el grupo receptor pueda construir un triángulo igual. Se intercambian los mensajes y se le entrega a cada grupo una hoja de papel de calcar para que realice el dibujo según las condiciones expresadas en el mensaje y luego lo devuelva al grupo emisor para que verifique si la construcción realizada es correcta. En esta instancia no hay restricciones para la formulación del mensaje. En el caso de que en los mensajes no se proponga algunas de estas posibilidades: tres lados, dos lados o un ángulo y un lado y dos ángulos, el docente planteará una actividad de modo que pueda discutirse la que falta y determinar cuáles son las adecuadas. En función de lo efectuado en la primera

construcción, en la que contaban con longitud de los tres lados, se establece que el nuevo mensaje que formule el grupo emisor no puede contener la longitud de los tres lados.

Marco de referencia

Se considera en este apartado los referentes teóricos que aportan al análisis, que se presenta en esta propuesta, en función de lo efectuado por los grupos seleccionados.

Particularidades del trabajo en geometría

Laborde y Vergnaud (1997) plantean que una característica esencial de la enseñanza de la geometría es el lugar acordado a las representaciones gráficas en la enseñanza de los objetos geométricos y en la manipulación, por parte de los alumnos, de las mismas. Algunos de los problemas de interpretación por parte de los alumnos al utilizar en la enseñanza los dibujos como modelos de las figuras es el no reconocimiento del carácter invariable de la figura cuando se pone el dibujo en distintas posiciones, o la utilización de ejemplos prototípicos y que los alumnos poseen una visión muy empirista de la geometría, basada en el dominio de la percepción.

Broitman e Itzcovich (2003) sostienen que hay distintos tipos de problemas geométricos según los conocimientos que involucran, algunos se resuelven con conocimientos espaciales, ligados a desplazamientos efectivos en el espacio físico, que se adquieren de manera espontánea y otros que también incluyen conocimientos espaciales pero no son de desarrollo espontáneo sino que involucran conocimientos que requieren niveles más complejos de conceptualización, representación y adquisición. En los primeros años de la escuela secundaria se debe apuntar a trabajar en un modo de pensar propio del saber geométrico, considerando que este “modo de pensar” implica apoyarse en propiedades de los objetos geométricos para poder anticipar relaciones no conocidas o inferir nuevas propiedades. Esto supone demostrar la validez de una afirmación a través de argumentos que en algunos casos se oponen a la percepción o la medida.

Formulación y validación de propiedades

Sadovsky (2005) expresa que pensar la clase como lugar donde se realice actividad matemática requiere plantear propuestas para que los estudiantes sean desafiados a formular conjeturas, ensayar formas de validarlas, producir argumentos deductivos, arriesgar respuestas que contribuyan a arribar a las resoluciones que se buscan, reformular y reorganizar los conocimientos generados a la luz de los nuevos que producen, elaborar otras herramientas y también determinar sus limitaciones. Esto implica que los estudiantes tomen como objeto de reflexión sus resoluciones, que puedan producir teorías a partir de ellas, que puedan volver hacia atrás y revisar y modificar cuestiones elaboradas, que tomen conciencia de la provisoriedad de sus aprendizajes. Señala además la importancia de las decisiones que el docente toma sobre la marcha, en particular el valor y la cabida que le otorga a las cuestiones que aparecen con las conjeturas formuladas por los estudiantes y cómo reconstruye a partir de esto una fundamentación matemática con los conocimientos que los mismos disponen.

Itzcovich (2005) plantea que introducir a los estudiantes en el trabajo deductivo supone para el docente tener resueltos aspectos didácticos y matemáticos para, en consecuencia, poder realizar una toma de decisiones a la hora de gestionar una demostración en la clase, articular las producciones de los alumnos, sus interrogantes, simultáneamente con su idea de presentar el conocimiento matemático en la clase y que no se contradiga con su concepción de rigor. El autor explicita que asumir como práctica geométrica en el aula la puesta en juego de las propiedades de los objetos geométricos, y que la producción de argumentos esté ligada al uso de propiedades,

genera para el docente, la dificultad de decidir cuáles son los conocimientos que se admiten como punto de partida para que el estudiante pueda elaborar una argumentación deductiva.

Itzcovich (2007) sostiene que un alumno debe ser capaz de argumentar, fundamentar sus conclusiones, considerar los juicios de sus compañeros para aceptarlos o rechazarlos, hacer el esfuerzo por comprender la demostración realizada por otro o proponer una demostración. El modo que ingresen a esta manera de trabajo es ofrecerles situaciones adecuadas a su nivel de escolaridad, que les muestren la insuficiencia de lo experimental como modo de validación. Sostiene que se deben proponer problemas que pongan al alumno en interacción con objetos que no pertenezcan al espacio físico sino a un espacio conceptualizado, que pongan en juego las propiedades de los objetos geométricos.

Responsabilidad de alumnos y docente en la actividad matemática

Quaranta y Wolman (2003) se cuestionan sobre cuál es el sentido de las discusiones en la clase de matemática y sostienen que los intercambios con los compañeros y con el docente comprenden explicitaciones, confrontaciones y justificaciones. Estas actividades reflexivas enriquecen futuras resoluciones e irán construyendo el camino de la validación del trabajo matemático, aunque en general no siguen las reglas del debate matemático. La “resolución conjunta” entre los alumnos requiere tener en cuenta lo que dice el otro, las sugerencias, el explicitar y justificar las elecciones que se hacen, las que provocan intercambios que posibilitan tomar conciencia sobre aspectos no considerados, descubrir nuevos, cuestionar otros; en consecuencia las puestas en común abren un espacio para el progreso de la comprensión del conocimiento en cuestión.

Chemello y Crippa (2011) sostienen que en la mayoría de las clases es el docente el responsable de establecer la legitimidad y validez del conocimiento que se produce en el aula, lo que implica que los alumnos tienden a no hacerse cargo de la validez de sus producciones. Plantean que es necesario gestionar situaciones áulicas que promuevan devolver la responsabilidad sobre el trabajo matemático a los estudiantes. El docente no debe intervenir durante la resolución de una tarea propuesta, favoreciendo las construcciones de pruebas autónomas por parte de los alumnos. Consideran, también, la clase como una “comunidad de producción matemática”, en donde el progreso en las maneras de validar requiere de una negociación que permita a los estudiantes aceptar reglas que no siempre son consideradas como objetos de enseñanza.

Análisis de la actividad

Se desarrolla lo que sucede en la puesta en común considerando los casos en que los grupos dieron como datos en el mensaje, para la construcción del triángulo, **(1)** los tres lados; **(2)** dos lados y un ángulo y **(3)** un lado y al menos dos ángulos. Presentamos lo realizado por tres de los ocho grupos dada la extensión permitida para este trabajo.

Análisis de lo actuado por el Grupo A

Mensaje (1): “Usamos un segmento de 10 cm como base, luego tomamos la medida de 7 cm con el compás y de un extremo de la base tomamos una circunferencia y del otro extremo del mismo paso con la misma medida otra circunferencia. Desde el punto que se unen las circunferencias trazamos con regla los lados restantes”

P: ¿que pasó con los triángulos que construyeron? ¿Cómo resultaron? // As: Iguales

P: Bien resultaron iguales. ¿Qué datos dieron? // As: Los tres lados

Consideramos que este mensaje se ve influenciado por la actividad anterior en la que trabajaban con construcciones que tenían como tarea enunciar la desigualdad triangular de los lados de un triángulo en la que los alumnos realizaron construcciones utilizando tres segmentos. De todos modos la docente no retoma dicha propiedad, ni realiza cuestionamientos sobre las aseveraciones que obliguen a los estudiantes a validar sus afirmaciones.

Mensaje (2): “Un lado mide el siguiente de uno, aumentado a la raíz de nueve, aumentado la mitad de una unidad. El otro lado mide el doble de media docena. La abertura es menor a 119 y mayor que 115, es un número impar”

Haciendo referencia a la cuestión que aparece en el mensaje sobre la amplitud del ángulo la docente pregunta: *Bien, y qué número es?*

A: 117 // P: 117°, bien.

Los estudiantes discretizan la medida del ángulo, Mántica y Carbó (2013) sostienen que:

Otro conflicto que se evidencia es que la noción de unidad de medida es tan fuerte que no les permite a los estudiantes considerar sus partes. El trabajo con los grados como unidad de medida imposibilita, a los alumnos, considerar a la medición como un proceso continuo, pues aún está ausente en ellos el significado entre las transiciones de: grados-radianes-reales. (50)

La docente decide obviar la cuestión de la continuidad en la medida, si bien cuando se planteó la tarea previa, se abordó esta problemática. Continúa analizando el mensaje

P: **Pero ¿a qué ángulo se refería el mensaje?** // A: al que forman los segmentos.

P: ah, bueno, por que fíjense, para ustedes la abertura es ángulo, pero no aclaran que ángulo, se entiende. Entonces, la abertura se referían ustedes al ángulo que forman los dos segmentos. Ellos entendieron lo mismo, porque lo dibujaron exactamente igual, y coincidieron los triángulos. Bien. Bueno, entonces, recapitulando, ¿Qué datos dieron?

As (clase): dos lados y el ángulo

P: dos lados y el ángulo comprendido entre los dos lados, y ¿que pasó con los triángulos?

As (clase): fueron congruentes.

Los estudiantes consideran implícitamente, que es el ángulo que forman los lados, a pesar que esto no se explicita en el mensaje, agregan al mensaje un dato que no aparece. No ponen en juego los conocimientos geométricos que disponen, no lo consideran como modelo para resolver las cuestiones que se presentan en el problema. Trabajan en el espacio físico. Probablemente consideran el ángulo comprendido aunque no se explicita, por una cuestión ligada a los instrumentos que poseen para la construcción, la “necesidad” de resolver el problema y el hecho de trabajar generalmente con problemas con solución única.

Mensaje (3) “Es un triángulo escaleno, uno de sus ángulos es de 79°, otro es de 57° y un lado 10 cm”.

Una alumna del grupo receptor manifiesta que el mensaje está mal redactado porque no especifica a qué ángulos se está refiriendo. Algunos sostienen que el ángulo de 57° es el opuesto al lado de 10cm, se genera una discusión respecto a cómo considerar el ángulo

A₅: “como dieron solamente dos ángulos, del lado que lo pongas va a estar bien, porque si das vuelta la hoja los triángulos siempre los puedes hacer coincidir”

P: ¿pero a ustedes les quedó una duda? Ustedes escribieron. A ver lee”

A₅: “para nosotros este mensaje está mal redactado porque no explica bien cuál va a ser la abertura en grados del ángulo”.

P: “¿a qué se refieren, con la abertura?” // A₄: “8 cm, la abertura de 57 acá arriba”

P: “Ah, abertura te referís al ángulo opuesto”

A₄: “Claro, hacer los 57 y acá tomar los 79”, indicando un extremo del segmento de 10 cm.

A₄: “entonces no sabíamos si tomábamos 79 está bien orientado, tal vez daba para otro lado, y no podía ser un triángulo”

P: “lo que pasa es que justo coincidió porque ustedes tomaron exactamente los mismos ángulos”

A₄: “y porque ellos dedujeron que lo íbamos hacer así, porque si no, no se hubiese formado el mismo triángulo”. Tal vez así no se formaba el triángulo”

El problema que se plantea en este caso, nuevamente tiene que ver con el instrumento que se utiliza, el transportador. Los estudiantes utilizan el segmento dado como parte del lado del ángulo y los 79° en sentido contrario a las agujas del reloj (cuando en realidad deberían considerarlo en igual sentido). En ese caso, las semirrectas que determinan los ángulos interiores de 101° (en lugar de 79° al considerar el adyacente en la construcción por uso incorrecto del transportador) y 57° se cortan fuera de la hoja. Los estudiantes establecen un vínculo natural entre el dibujo y la figura. Además el triángulo que les queda no coincide con la “imagen prototípica” que tienen los estudiantes. Esto podría deberse a que generalmente, en la enseñanza, se desarrolla primero una geometría ligada a la observación y comprobación con los dibujos, para luego hacer un razonamiento deductivo basado en la figura.

P: “da la casualidad que tomaron el mismo ángulo. Porque pudo haber pasado como al grupo B, fíjense que no toman el mismo y no les dio. Ustedes dan dos ángulos y el lado, pero no dicen qué ángulos”

A₄: “y no íbamos a saber dónde se iban a cortar, porque podíamos seguir, seguía y nosotros queríamos tomar los 79 arriba y seguíamos con los cincuenta..no se cuántos”. (no considerar los ángulos adyacentes al lado de 10cm les imposibilita determinar el tercer vértice del triángulo para tomar los 79°).

Los alumnos no utilizan la propiedad que ya conocen (suma de los ángulos interiores de un triángulo) para determinar que la amplitud del tercer ángulo es única, dado que para la construcción con los elementos de geometría sí necesitan el lado y los ángulos cuyos vértices son sus extremos. No realizan un razonamiento deductivo que les permita hacer la construcción. Se nota la necesidad de especificar las “aberturas” en relación al segmento que se toma como “base”. A pesar de que en la construcción les quedan dos triángulos congruentes, en el grupo receptor se plantea la discusión sobre la ubicación de los ángulos. Reconocen que “justo les coincidió” porque tomaron los ángulos adyacentes al segmento, pero podrían no haber coincidido si tomaban los ángulos en diferente posición. La docente socializa esto y pone de manifiesto que si tenemos las amplitudes de dos ángulos, conocemos la del tercero. Los alumnos no logran evidenciar que tienen a mano una propiedad que les permite encontrar el ángulo restante.

Análisis de lo actuado por el Grupo B

Mensaje (1): “Para construir este triángulo, la medida de cada lado es igual a un tercio de la medida de una regla de 30 cm”.

P: ¿Qué datos dieron? // A: los tres lados

P: ¿Qué pasó? // A: Dieron iguales

No se cuestiona la respuesta de los alumnos, no se devuelve al alumno la responsabilidad de validar lo que afirma, sólo con expresar que dieron iguales se acepta que efectivamente el triángulo construido por el grupo receptor coincide con el realizado por el emisor del mensaje.

Mensaje (2) “para construir nuestro triángulo necesitan formar un ángulo de 130° y que dos de sus lados midan 5,5 centímetros”

El grupo lee el mensaje recibido, comienzan a reflexionar sobre el ángulo a considerar. La docente dice: *¿Aclara que ángulo es?* // A: *no, no aclara*

P: *no aclara que ángulo es, que es el ángulo que forman los dos lados*

A: *pero dice de sus lados y yo entiendo que son los lados del ángulo*

P: *y que dos de sus lados,... puede ser otro ángulo del triángulo*

A: *si, pero como mencionaba el ángulo...*

Nuevamente el docente toma la decisión de no considerar el caso que los datos sean dos lados y un ángulo no determinado por ellos. Establece no utilizar el planteo de la clase como productora de nuevos problemas, tal sería el caso de analizar qué ocurre cuando los datos son dos lados y un ángulo que no es el que estos determinan.

P: *de los tres ángulos ustedes, tomaron un ángulo que es justamente.* // A: *el que forman los lados*

P: *el que forman los dos lados, pero podrían haber tomado otro, acá, se entiende lo que les digo?*

A: *si tomaba otro, no daría igual*

P: *y, no daría igual. Entonces, ¿qué podemos concluir?, ¿cuándo resultaron congruentes los triángulos?*

// A: *si le damos dos lados y el ángulo que formaban esos lados*

El docente remarca que el ángulo a considerar es el determinado por los lados dados, dando por supuesto que si no es así el triángulo obtenido no es congruente al dado. El hecho que se asuman o no ciertas cuestiones para debatir colectivamente depende del valor y la cabida que éste decide darle en el marco del problema. Una de las razones por las que suponemos el docente no tomó este caso para proponerlo en el debate de la puesta en común, es que resulta difícil “sobre caliente” encontrar una fundamentación matemática adecuada a los conocimientos de sus alumnos. Consideramos que, en este caso, se hace hincapié en la observación y comprobación sobre los dibujos, más que en las propiedades con las que se cuentan para validar las afirmaciones. Se desconoce al alumno como productor de nuevos problemas, no cuestionando sus afirmaciones y no profundizando las dudas.

Mensaje (3): “La base del triángulo es de 8 cm. Sus ángulos miden uno, 50° , otro 90° y otro 41° ”

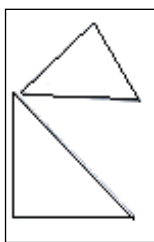


Figura 1
Construcción
grupo receptor

A₁ (grupo emisor): “En el triángulo que nosotros dibujamos el ángulo que formaba el triángulo medía 90° y ellos no habían puesto 90° en ninguno de los tres lados.”

A₂ (grupo emisor): “dijimos que uno medía 90° , el otro 41° y el otro 50° . Pero el de 90° no aparecía”

A₁: “Le dimos, así, el de arriba (haciendo alusión al ángulo de 50°), que después nos dimos cuenta que no es necesario.”

Los estudiantes hacen referencia a las relaciones espaciales pues dicen “arriba” para indicar el ángulo de 50° . Reconocen el ángulo de 90° si los lados que lo forman están en posición horizontal y vertical, dado que ellos dicen “no habían puesto 90° en ninguno de los tres lados”, y no reconocen en el triángulo dibujado por el grupo receptor el ángulo recto cuando la hipotenusa es paralela al borde de la hoja. Esto está ligado al uso de figuras prototípicas en la enseñanza, en el caso del triángulo rectángulo el ángulo recto formado por los catetos paralelos a los bordes de la hoja.

En la puesta en común los alumnos del grupo B retoman lo discutido en la presentación del grupo A respecto de los datos suficientes para construir un triángulo congruente a uno dado.

A₂: “nosotros le dimos el de 90° , el de 41° y el de 50° ”

En ese momento interviene un alumno del grupo clase: A₃: “*el de 40*”

Los integrantes del grupo afirman: “*de 41*”

El mismo alumno de la clase dice: A₃: “*¿Cómo uno media 41, el otro 50 y 90? Pero no puede ser triángulo porque los ángulos internos del triángulo sumados tienen que dar igual a 180*”

Una alumna de la clase dice: “*Ah...era 40 sino, no puede sumar 180*”.

Los integrantes del grupo emisor dicen: “*Ah...Ah..., lo medimos mal*”, aceptándolo sólo como un error de medición.

El alumno de la clase valida la afirmación de que el tercer ángulo debe tener una amplitud de 40°, utilizando una propiedad conocida. Es decir que hay un control con los medios de que dispone de la resolución que va realizando. Es importante que los alumnos reconozcan las propiedades que disponen como una herramienta eficaz y confiable para establecer la validez de una proposición. Esto permite el trabajo, en el aula, de las reglas del debate matemático, como la afirmación de que no es suficiente una constatación en el dibujo para afirmar que un enunciado es verdadero. Salvada esta cuestión de las amplitudes de los ángulos, la profesora retoma otra vez los dibujos de los triángulos elaborados por el grupo receptor y destaca que hay dos triángulos construidos en la hoja de calcar;

P: “*¿por qué hay dos construcciones?*”, ¿por qué construyeron dos veces el triángulo?”

A₁: “*claro el de arriba estaba mal, no tiene el ángulo de 90*”.

A₃: “*en este triángulo el ángulo de arriba es el de 90*”

P: “*si chicas, acá está el ángulo de 90*”. Señalando en la construcción el ángulo recto.

La alumna A₁ a partir de esta intervención, sigue sin visualizar el ángulo de 90° en el primer triángulo construido por el grupo receptor.

A₁: “*Este es el que hicieron primero, que no estaban los 90*”

P: “*cómo que no estaban los 90?, acá está*” y señala el ángulo recto del primer triángulo.

Se evidencia, como ya mencionamos, que los alumnos del grupo emisor no reconocen el ángulo recto si los lados que lo determinan no están en la posición horizontal y vertical.

P: “*pero no es congruente con el de ustedes? ¿Qué pasó? Tienen el ángulo de 90° pero no es igual*”.

La docente expone a la clase que a pesar de ser un triángulo rectángulo no es igual al construido por el grupo emisor, y retoma el mensaje porque si bien cumple las condiciones pedidas una de las construcciones coincide y la otra no.

P: “*¿qué pasó con el primero que no les dio?*”

La docente no sanciona la validez o invalidez de las propuestas dadas por los estudiantes, pero si abre un espacio de incertidumbre que los obliga a buscar criterios para establecer si las condiciones enunciadas son correctas o no en ambos casos.

Una alumna pregunta: “*¿la base mide 8 cm?*”

P: “*si*”. Y corrobora que todas las dimensiones son las correctas.

Una alumna del grupo clase expresa: “*pero el mensaje no especifica donde están los ángulos*”

P: “*Ah...ese es el problema*”, y reconstruye el modo en que el grupo receptor realizó cada uno de los triángulos. Manifiesta que en un caso (el que no coincide) el ángulo recto es el opuesto al lado de 8 cm y en el otro, el ángulo recto es “contiguo” al lado de 8 cm haciendo referencia a que el vértice del ángulo recto es uno de los extremos del lado de 8 cm.

Para verificar lo que dice la profesora realizan una validación empírica, superponiendo cada una de las construcciones realizadas por el grupo receptor con la del grupo emisor.

P: “*entonces, ¿qué es lo que falta aclarar?*”

A: “la base mide 8, 90° a la derecha o a la izquierda y 50° a la izquierda, por decir un lugar.”

Los alumnos establecen que deben determinar el vértice de los ángulos indicados en el mensaje.

P: “Por qué crees necesario decir izquierda o derecha” // A: “Porque lo superpones”

Una alumna de ese grupo sostiene: “deberían expresar que el de la izquierda mide 90° y el de la derecha 40° ”

Los estudiantes establecen relaciones espaciales preponderantemente a las geométricas. No reconocen el ángulo recto del triángulo cuando los lados que lo determinan no están paralelos a los bordes de la hoja, aun cuando lo corroboran mediante la medición.

Análisis de lo actuado por el Grupo C

Mensaje (1): “Para construir este triángulo, tienen que hacerlo con estas medidas, 6, 6, y 12”.

P: ¿Qué datos dieron? // A: la medida de los tres lados

P, ¿y que pasó? // A: Se construyó otro igual

P: Fíjense el grupo anterior y el anterior dieron los tres lados y siempre se construyó otro igual.

La docente institucionaliza el criterio de congruencia con la sola constatación empírica, en ningún caso solicita a los alumnos que validen sus afirmaciones.

Mensaje (2): *un lado del triángulo mide 3 centímetros y otro 10”*

En este caso el grupo receptor solicita nuevos datos en el mensaje

Mensaje: “con dos lados se pueden formar infinitos triángulos. ¿Cuántos grados mide el ángulo que forman los dos segmentos?”

Los integrantes del grupo emisor dialogan sobre la nueva información y deciden agregar al mensaje: “ 155° ”.

A (grupo receptor): Bueno, nosotros habíamos dicho que podía ser un lado de 3 y otro de 10, y le preguntamos que nos den otra pista para sacar el otro lado, porque con dos lados se pueden formar infinitos triángulos. Porque hay distintos grados de inclinación del ángulo que forman los dos segmentos.

En la puesta en común la docente trae a la clase la discusión planteada al interior del grupo receptor porque los estudiantes hacen uso de propiedades geométricas para fundamentar el pedido de un dato específico. Este tipo de actitudes apunta a un modo de pensar propio del saber geométrico, dado que la validación de la afirmación se apoya en una propiedad geométrica, enunciada en la tarea previa. Hay una intencionalidad didáctica, por parte del docente, de poner en juego conocimientos geométricos, se pretende toda la clase tome como objeto de reflexión los datos dados en el primer mensaje y que el modo de validar en este caso es a partir de una propiedad y no de una representación gráfica.

P: exactamente, ¿ustedes les preguntaron algo?

A: cuántos grados mide el ángulo que forman los dos segmentos

A: nosotros les contestamos 155°

P: Resultaron congruentes, entonces, ¿qué datos dieron, para que sean congruentes los triángulos?

As: Los dos lados y la medida del ángulo

P: ¿qué ángulo? // A: el que forman los lados, el que forman los segmentos.

El acento está puesto, en que debe especificarse el ángulo considerado, reiterando lo acordado con el grupo anterior, que debe ser el determinado por los dos lados que se dan como

datos. Se pone de manifiesto que no es intención del docente generar una discusión respecto a qué ocurre si el ángulo no es el determinado por los lados dados. Esto no forma parte de su planificación inicial y por tanto no orienta la discusión para generar un nuevo problema.

Mensaje (3): “Un segmento es de 13 cm y 2 ángulos uno es de 49° y otro de 127° ”

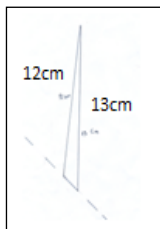


Figura 2
Construcción
grupo emisor

P: ¿Qué les pasó con el triángulo?

A₈: Bueno, nosotros hicimos la base de 13, uno de sus ángulos era de 49° y el otro 127° . Construimos el triángulo, pero se llegan a juntar los segmentos fuera de la hoja, porque el ángulo de arriba era de 5° , era muy arriba”

El triángulo no es el “prototípico” reconocido por los estudiantes.

P: ¿Qué les parece? ¿Qué pudo haber pasado con este mensaje? “Volvamos a repasar, ellos dan 13cm, 49° y 127° , cuándo ustedes lo quieren hacer, no lo pueden construir, les queda afuera de la hoja...”

Aparecen cuestiones referidas al tamaño del espacio en el que se trabaja. El grupo emisor construyó el triángulo en una hoja, por lo que es razonable que el grupo receptor suponga que si no puede realizarlo en la hoja, algo está mal. Los alumnos dialogan entre sí y con la docente respecto de la necesidad de indicar la posición de cada uno de los ángulos respecto del segmento tomado como base. Luego de la discusión la docente retoma lo planteado. Explicita que en un caso se toma el ángulo de 127° sobre la base y en otro se lo toma opuesto a ese lado, por esta razón no coinciden los triángulos contruidos.

A₁₀: Entonces para poder construir, hay que aclarar la ubicación de los ángulos...

P: ¿qué pasó cuando coincidían?

A₁₀: Como una “teoría”, entonces, siempre que no se da la ubicación de los ángulos, o sea, si se da la medida de un solo lado y no se dan la ubicación de los otros dos ángulos, no se puede construir un triángulo igual.

Pareciera que los estudiantes plantean al decir una “teoría” la necesidad de construir una propiedad, una ley. Esto muestra la importancia de no descartar los procedimientos erróneos puesto que pueden dar lugar a un análisis y reflexión sobre los conocimientos puestos en juego y el hecho de advertir el error demanda una explicación y justificación. A partir del trabajo empírico pueden insertarse en el terreno de la deducción y advertir la insuficiencia de lo experimental como modo de validación.

Conclusiones

En el grupo A, los estudiantes trabajan en el espacio físico, cobra para ellos mucha importancia cómo está ubicado el triángulo. Consideran cuestiones que no se explicitan en los mensajes, dado que si no fuera de ese modo la construcción del triángulo no sería factible, utilizando los elementos de geometría. Los estudiantes tienen una visión de la geometría basada en la precepción. Observamos que si los datos que se encuentran en el mensaje contienen dos lados del triángulo y un ángulo, es más simple para la construcción, utilizando los elementos de geometría, considerar que el ángulo dado es el comprendido entre ellos. Por esta razón, en general, los estudiantes, no se plantean que el ángulo pudiera tener como vértice el extremo de sólo uno de los segmentos dados “la atracción perceptiva de ciertos aspectos del dibujo obstaculiza un análisis geométrico adaptado a la solución del problema escondiendo, por contraste combinaciones de partes de la figura útiles para la solución” (Laborde & Vergnaud, 1997, p.96). Cuando consideran que el mensaje está mal redactado porque no especifica a qué ángulo hace referencia, lo hacen porque al intentar considerar como vértices del triángulo uno que no sea extremo del segmento dado como dato no pueden construirlo. Sostienen que podría

tratarse del ángulo interior del triángulo opuesto al lado dado, pero que en ese caso como no pueden determinar el tercer vértice con los elementos que utilizan para la construcción. En este tipo de propuestas, es importante que el docente no valide de entrada la respuesta correcta, pero si que retome para todo el grupo lo que sostienen algunos alumnos, planteando contraejemplos, recordando o haciendo recordar acuerdos o propiedades anteriores en relación con los conocimientos que se están trabajando. Quaranta y Wolman (2003) sostienen que las situaciones de validación “dan lugar a debates entre alumnos que, organizados por el docente, posibilitan que se explicita y se argumente sobre lo realizado; constituyen, de esta manera, un medio para establecer pruebas o refutarlas” (p. 197). En este grupo el docente decide no intervenir para cuestionar la discretización de la medida que aparentemente aceptan tanto los estudiantes del grupo emisor como el receptor. No devuelve la responsabilidad a los estudiantes de fundamentar sus afirmaciones.

En el grupo B es muy importante la percepción y las posiciones de los dibujos realizados. La imagen del ángulo recto de los estudiantes es con sus lados en posición horizontal y vertical, esto les impide reconocerlo en otra posición, aún constatándolo por medición. Los alumnos en la escuela secundaria, en general, no trabajan en un espacio conceptualizado, se nota una marcada influencia de las figuras prototípicas. Laborde y Vergnaud (1997) sostienen que podemos ver en clase que los alumnos no comprenden el discurso del docente, pues este último se refiere implícitamente a la figura, mientras que los alumnos comprenden el discurso como referido al dibujo. La ruptura del contrato que constituye pasar del dibujo a la figura aparece entonces con toda su fuerza en los intercambios verbales entre docente y alumnos (p. 97).

Cuando analizan si los dos triángulos rectángulos construidos son congruentes al dado por el grupo emisor, el docente da a los estudiantes la responsabilidad de validar la afirmación que realizan. Los estudiantes hacen una constatación empírica, más que el uso de propiedades para fundamentar estas afirmaciones, con los conocimientos de que disponen es lo que están en condiciones de producir. En el caso de las amplitudes de los ángulos interiores, no emplean la propiedad de que disponen sino que utilizan métodos empíricos.

En el grupo C puede verse claramente que los estudiantes tienen un “modo de pensar” que los lleva a apoyarse en las propiedades para fundamentar sus afirmaciones. Cuando los datos que se proporcionan son sólo dos lados del triángulo los alumnos hacen referencia a lo trabajado en la tarea previa, expresando que con estos datos pueden construirse infinitos triángulos. Broitman & Itzcovich (2003) sostienen que iniciar al estudiante

en un modo de pensar propio del saber geométrico supone poder apoyarse en propiedades de los objetos geométricos para poder anticipar relaciones no conocidas o inferir nuevas propiedades. Es decir, realizar un proceso de anticipación sobre los resultados a obtener sin necesidad de realizar acciones empíricas y sin apoyarse exclusivamente en la percepción (pp. 303-304).

Aquí los alumnos hacen uso de las propiedades disponibles para fundamentar el pedido de otros elementos para la construcción. Cuando validan su afirmación sobre que no les es posible construir de un único triángulo en el caso que los datos sean un lado y dos ángulos, si bien lo fundamentan basados en el tamaño del espacio, consideran que debe enunciarse una “propiedad” que luego les permita fundamentar sus afirmaciones. Realizan esta fundamentación utilizando un contraejemplo, en forma empírica, para formular que debe especificarse cuáles son los vértices de los ángulos que se especifican en el mensaje. Están utilizando las reglas del debate matemático. Cuando el grupo solicita un dato particular o cuando busca un modo, aunque empírico, para fundamentar por qué toma los ángulos de determinada manera, el docente

responsabiliza a los estudiantes de estas decisiones. Respecto de esto Chemello y Crippa (2011) sostienen que es importante “que el docente “no participe” de la toma de decisiones durante la resolución del problema propuesto, favoreciendo la construcción de pruebas autónomas por parte de los alumnos” (p. 67).

Los alumnos del grupo A realizan constataciones empíricas y esto les es suficiente para afirmar sus conjeturas. Los del grupo B, si bien se puede apreciar que no reconocen los triángulos rectángulos congruentes si no están en la misma posición, es decir que prima la precepción sobre lo deductivo, son capaces de aceptar cuando se les cuestiona una afirmación dado que no cumple una propiedad ya conocida, por los integrantes de otro grupo en los que si prima la deducción por sobre la experimentación. El grupo C si bien en un caso pueden determinar la falta de datos utilizando una propiedad para fundamentar su conjetura, en otro caso se basa en lo experimental, como el tamaño del espacio en el que trabajan, para fundamentar lo que afirman. En un caso se apoyan en propiedades pero en otro con acciones empíricas les basta para enunciar la propiedad.

Cuando los alumnos de dos grupos sostienen que si no se considera un ángulo particular el triángulo no daría igual, hay como un telón de fondo, en la discusión, vinculada a las posibles soluciones del problema. En este caso el docente deja de lado la posibilidad del análisis respecto a la existencia y al número de soluciones según el ángulo que se tome. Sadovsky (2005) sostiene que las decisiones que el docente toma sobre la marcha en general están orientadas por su proyecto de trabajo.

La actividad matemática del docente se refiere fundamentalmente a la reconstrucción de los procesos de validación adaptados a los conocimientos de los alumnos, lo que supone para el docente una reorganización de sus propios conocimientos. El docente aprende matemática cuando piensa cómo se fundamentan los problemas teniendo en cuenta qué saben los alumnos (p. 79).

Es notable que los alumnos para convencerse de sus afirmaciones lo realicen en general utilizando constataciones a través de mediciones, pero cuando su intención es persuadir a otro en confrontaciones sobre lo que sostienen, si disponen, utilizan propiedades que les permiten sentirse más respaldados en lo que sostienen. Por esta razón consideramos que las discusiones, gestionadas por el docente, pueden conducir a progresos en los modos de validar acercándolos a modos con cada vez más rigor matemático.

Podemos observar que son pocos los alumnos que utilizan las propiedades para justificar sus afirmaciones, es más fuerte para ellos la representación en la hoja, Broitman e Itzcovich (2003) plantean que el modo de pensar propio del saber geométrico, “supone poder apoyarse en propiedades de los objetos geométricos para poder anticipar relaciones no conocidas o inferir nuevas propiedades” (p. 303). El estudiante que manifiesta la necesidad de expresar una propiedad, “una teoría”, considera que necesita algo más que la validación empírica para fundamentar las afirmaciones, intenta entrar en lo que podríamos llamar un trabajo deductivo. Itzcovich (2007) sostiene que “lo importante de este tipo de propuesta es que permiten que aparezca lo deductivo por sobre lo experimental, aunque lo experimental forme parte en un primer momento del trabajo con un tinte mas exploratorio” (p. 174). Puede apreciarse en el grupo en el que se implementa la propuesta que son escasos los estudiantes que consideran la necesidad de validar sus afirmaciones utilizando acciones que no sean empíricas.

Es notable la actitud de la docente en el trabajo de interacción entre los estudiantes en el primer caso de mensajes (los tres lados), no insta a los alumnos a que validen sus afirmaciones.

Se limita a preguntar como son los triángulos obtenidos y a remarcar que los datos para construirlos son las longitudes de sus tres lados. Como si los casos que no generan desacuerdo entre los estudiantes no fuera necesario validarlos. Se quedan con la constatación empírica. Itzcovich (2005) afirma que,

...las situaciones que se proponen a los alumnos con la finalidad de indagar, identificar o reconocer propiedades de las figuras deben impactar en los procesos intelectuales que permitan hacer explícitas las características y propiedades de los objetos geométricos, más allá de los dibujos que utilicen para representar dichas figuras (p.18).

De este modo entendemos la importancia de que tanto el docente como los alumnos tengan en cuenta la utilidad de la construcción de una figura para explorar sus propiedades, aunque no para realizar generalizaciones.

En la puesta en común vemos como, en algunos casos, las intervenciones del docente propician situaciones que favorecen la elaboración de argumentos que facilitan la evolución de los modos naturales de razonar de los estudiantes y de las reglas que utilizan en debates extramatemáticos hacia los modos válidos de la comunidad matemática en función de las reglas del debate matemático, aunque de modo insuficiente. También es notorio que en otros casos no toma a la clase como productora de nuevos problemas y deja pasar situaciones de las que debería hablarse explícitamente, ya sea para rechazarlas, para aceptarla o para considerar sus límites. El rol del docente es sustancial tanto para la emergencia de un problema como para el tratamiento que se hace del mismo.

Dentro de las limitaciones que notamos de la propuesta son los elementos que se entregan a los estudiantes para realizar la tarea, hoja blanca y de calcar, esto puede condicionar a los estudiantes a realizar constataciones empíricas, de todos modos esto no habilita a que sea este el único modo que consideren para fundamentar sus afirmaciones.

Referencias

- Broitman, C., & Itzcovich, H. (2003) Geometría en los primeros años de la EGB: problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza. En M. Panizza, (Comp.), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas* (pp. 289-326). Buenos Aires: Paidós.
- Chemello, G., & Crippa, A. (2011) Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible? En A. Diaz (coord.) *Enseñar Matemáticas en la Escuela Media* (pp. 55-77). Editorial Biblos. Buenos Aires.
- Cohen, L., & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid. La Muralla. S.A.
- Itzcovich, H. (Coord.) (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Itzcovich, H. (Coord.) (2007) *La matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula*. Buenos Aires: AIQUE Educación.
- Laborde, C., & Vergnaud, G. (1997). El aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Ejemplos ilustrativos. En G. Vergnaud (Comp.). *Aprendizajes y Didácticas: ¿Qué hay de nuevo?* (pp. 89-104). Buenos Aires: Edicial.
- Mántica, A. & Carbó, A. (2013). Interacciones en el aula de secundaria acerca de la dualidad infinito actual infinito potencial en un contexto geométrico. *Educación Matemática*, 25(3), 27-55. México: SOMIDEM.
- Quaranta, M., & Wolman, S. (2003). Discusiones en las clases de matemática: qué, para qué y cómo se discute. En M. Panizza, (comp), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo la EGB. Análisis y propuestas*, (pp. 189-243). Paidós. Buenos Aires.
- Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.