



Análise das justificativas de alunos em questões de fração envolvendo os invariantes ordem e equivalência

Raquel Factori **Canova**

Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil

fraquelc@yahoo.com.br

Angélica da Fontoura **Garcia Silva**

Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil

angelicafontoura@gmail.com

Tânia Maria Mendonça **Campos**

Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil

taniammcampos@hotmail.com

Rosivaldo Severino dos **Santos**

Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil

rosivaldosantos217@ygmail.com

Resumo

Esta comunicação analisa as justificativas apresentadas por alunos do 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental nas questões que envolvem os invariantes equivalência e ordem de frações. Essas questões serão denominadas neste trabalho como questões de raciocínio. O referencial teórico utilizado em nossa análise foi a Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud). Os alunos responderam oito questões individualmente em sala de aula. Os resultados apontam equívocos dos alunos ao aplicarem propriedades dos números naturais em problemas de frações e também que o conhecimento implícito nas questões de frações não se amplia facilmente no decorrer dos anos. Nesse sentido, há a necessidade de se investigar mais sobre como favorecer o processo de reflexão dos invariantes ordem e equivalência de números fracionários.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem de fração, Número Racional na

representação fracionária, Invariantes operatórios, Ordem, Equivalência, Ensino Fundamental.

Introdução

O objetivo deste trabalho é analisar 490 respostas de alunos¹ do 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental ao justificarem a escolha por uma das alternativas como resposta às questões de raciocínio em problemas de fração. Após analisar essas justificativas criamos algumas categorias as quais exemplificamos com protocolos de alunos. O desenho desse estudo inicia-se com a descrição da relevância do tema por meio de estudos que vêm sendo desenvolvidos e a fundamentação teórica. Em seguida apresentamos os procedimentos metodológicos, análise e discussão dos resultados e considerações finais.

Relevância do tema

Na literatura encontramos trabalhos de diferentes autores que chamam a atenção para o tema fração como uma das noções mais complexas que os alunos do Ensino Fundamental encontram ao estudar matemática (Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984; Hart, 1981; Kerslake, 1986; Kieren, 1988, entre outros). No Brasil, as frações são incluídas no currículo no 4º ano do Ensino Fundamental, e são exploradas no decorrer dos anos subsequentes. No entanto, pesquisas desenvolvidas no Brasil (ver, por exemplo, Canova 2013, Garcia Silva, Campos, Pinheiro, Souza 2013) e internacionalmente (Streefland, 1991, Behr, Harel, Post, Lesh, 1992, Nunes e Bryant, 2009, para citar apenas alguns), indicam as dificuldades em trabalhar com frações. Tais dificuldades devem ser levadas em consideração ao pensarmos que as crianças brasileiras não têm familiaridade com as frações no seu dia-a-dia, assim como tem com os números naturais. Com isso aparecem os obstáculos em que os estudantes querem utilizar as mesmas propriedades, conceitos válidos para os números naturais para com as frações.

Quando pensamos no ensino introdutório de fração, concordamos com estudos como os de Streefland (1991) e Nunes, Bryant, Pretzlik, Evans, Wade e Bell (2004) ao afirmar que duas situações são as mais indicadas: parte-todo e quociente. A situação parte-todo tem como ideia central a dupla contagem – um todo dividido em n partes iguais, no qual cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$. A ideia central da situação quociente é a divisão e existência de duas variáveis, uma correspondendo ao numerador e a outra ao denominador.

Além dos tipos de situações apoiados em Vergnaud (1990, 2009) consideramos também os invariantes, ordem e equivalência. Para esses invariantes, independentemente do conjunto numérico, nas relações de equivalência é possível colocar em uma mesma classe elementos equivalentes, e, assim, formar classes de equivalência. Em relação à ordenação temos que é possível ordenar elementos de modo que não haja dois deles no mesmo lugar (Vergnaud, 2009). No caso das frações é preciso explorar mais esses conceitos de modo a viabilizar uma melhor compreensão por parte dos alunos, uma vez que são conceitos fundamentais para a construção do conceito de fração.

¹Os professores desses alunos faziam parte do Projeto Observatório da Educação financiado pela CAPES. Projeto 99/2010: Educação Continuada e Resultados de Pesquisa em Educação Matemática: uma investigação sobre as transformações das práticas de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Coordenado pela Profa. Dra. Tânia Maria Mendonça Campos.

Fundamentação Teórica

Para subsidiar a análise dos resultados apoiamo-nos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993), a qual oferece uma estrutura que possibilita estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos e as relações existentes entre os conceitos. De acordo com o autor a construção de um conceito não se dá de modo imediato e o tempo necessário para essa construção varia de pessoa para pessoa. Um campo conceitual é o conjunto de situações, cuja compreensão necessita do domínio de vários conceitos de naturezas diferentes, de seus invariantes e por um conjunto de representações simbólicas.

Para Vergnaud (1990), é por meio das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para o sujeito. Nesse contexto, podemos distinguir duas classes de situações. Na primeira, o sujeito dispõe em seu repertório, em um dado momento de seu desenvolvimento das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação. Na outra classe o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão, a hesitações, a tentativas frustradas que o leva eventualmente ao sucesso ou ao fracasso.

Vergnaud (1990) considera ainda que no processo do domínio de um campo conceitual pelo estudante, é importante que o professor favoreça o desenvolvimento de esquemas de ação. Os esquemas são os procedimentos, os invariantes e as condutas organizadas por regras de ações sobre uma classe de situações dadas, isto é, a forma estrutural de atividade e está acompanhado de um teorema-em-ação ou de um conceito-em-ação.

O conceito-em-ação é um invariante operatório com suas propriedades e definições, quando são manifestados geralmente são explícitos (Vergnaud, 1990). Os teoremas-em-ação aparecem de modo intuitivo e, na maioria das vezes, são implícitos. Estão relacionados com as estratégias utilizadas pelo sujeito no momento de solucionar situações-problema, sem que consiga explicitá-los ou justificá-los (Vergnaud, 1990). Portanto, os teoremas-em-ação indicam um caminho para se analisarem as estratégias intuitivas dos alunos e ajudá-los a transformar conhecimento intuitivo em conhecimento explícito.

Procedimentos metodológicos

O estudo envolveu crianças com idade média de 10 anos. Todos eram alunos de escolas públicas da cidade de São Paulo, Brasil. Para essa análise excluímos as respostas em branco e as justificativas que não conseguimos categorizar, resultando em um análise de 490 justificativas.

A coleta de dados ocorreu na própria sala de aula dos estudantes, sujeitos desse estudo. Os alunos responderam individualmente a um caderno contendo oito problemas, e não contaram com o auxílio de qualquer material. Dos oito problemas, quatro eram de situação parte-todo e quatro de situação quociente. Dos quatro problemas, tanto de uma situação como de outra, dois envolvem o invariante ordem e outros dois o invariante equivalência. Nas oito questões, foi solicitado aos alunos que representassem, com frações, a situação expressa no enunciado e posteriormente, selecionassem uma alternativa, que considerassem correta, esta comparando duas quantidades – se uma era maior, menor ou igual à outra quantidade. Esta comparação denominamos como questões de raciocínio. Após terem selecionado uma das alternativas era solicitado uma justificativa para a escolha apresentada. Vale ressaltar que a comparação sobre o resultado da divisão não remeteria o estudante, necessariamente, à notação de fração. Os alunos poderiam responder somente interpretando o enunciado e o resultado da partilha. Sendo assim,

para essa comunicação iremos apenas analisar as justificativas dos alunos quanto às questões de raciocínio.

Quanto à aplicação do instrumento, a pesquisadora leu junto aos alunos questão por questão; entre as questões era dado um tempo para os alunos responderem as perguntas. Tal método foi adotado, pois acreditamos que assim evitaríamos eventuais dificuldades de leitura que pudessem interferir no desempenho dos estudantes na resolução das questões.

A seguir apresentamos um exemplo que ilustra a estrutura de cada um dos oito problemas:

Ana divide seu chocolate em 2 partes iguais e come 1 parte.
Marta divide seu chocolate em 4 partes iguais e come 2 partes.
Os chocolates são idênticos. Represente a fração que cada uma comeu.


 Ana





 Marta



questão de nomear frações

Ana comeu mais do que a Marta ☐

Marta comeu mais do que a Ana ☐

Ana comeu tanto como a Marta ☐

questão de raciocínio

Porque _____

↓
justificativa

Figura 1. Exemplo de um problema indicando os tipos de questões.

Esse é um problema na situação parte-todo e envolve o invariante equivalência, no qual destacamos as questões de nomear frações e raciocínio e também a parte que é o foco de nossa comunicação, que são as justificativas dos alunos quanto a escolha realizada.

Análise dos resultados

A análise dos protocolos dos alunos nos permitiu identificar as respostas consideradas por nós como válidas, ou seja, as justificativas nas quais os alunos apresentaram a ideia do conceito de equivalência ou ordem. Além disso, buscamos nas outras respostas, justificativas que nos permitissem analisar os argumentos utilizados pelo estudante para responder o problema proposto.

Apresentaremos a seguir algumas justificativas consideradas válidas. O problema a seguir envolve uma situação parte-todo com o invariante equivalência.

Ana divide seu chocolate em 2 partes iguais e come 1 parte. Marta divide seu chocolate em 4 partes iguais e come 2 partes. Os chocolates são idênticos. Represente a fração que cada menina comeu.



Ana



Marta

Ana comeu tanto como a Marta ☐

Ana comeu mais do que a Marta ☐

Marta comeu mais do que a Ana ☐

porque _____

Figura 2. Problema na situação parte-todo com o invariante equivalência.

Uma resposta considerada válida pode ser exemplificada pelo seguinte protocolo de um aluno do 4º ano que selecionou corretamente a alternativa de raciocínio:

Porque Marta comeu dois pedacinhos pequenos e Ana comeu um pedaço maior, que vale dois pedacinhos pequenos.

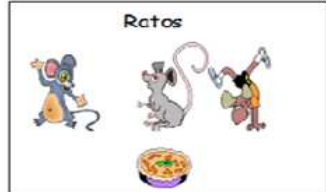
Figura 3. Protocolo do aluno 67 referente à categoria “justificativa válida”.

Esse aluno apresenta uma justifica válida, sem utilizar a linguagem formal, e mostra ter identificado a relação proporcional entre os pedaços de chocolate, mostrando compreender a equivalência das quantidades que cada menina comeu. Quanto à linguagem, esse fato era de se esperar uma vez que, até o momento de nossa coleta de dados, eles não tiveram contato com este conteúdo, segundo os professores responsáveis pelas classes.

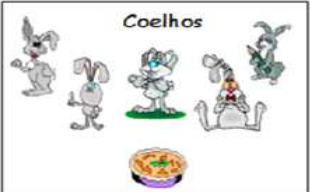
Outro exemplo das justificativas válidas pode ser observado no problema a seguir que envolve a situação quociente.

Cada grupo de ratos e coelhos tem uma torta de cenoura. Três ratos irão dividir igualmente 1 torta entre eles. Cinco coelhos também irão dividir igualmente 1 torta entre eles. As tortas são idênticas e não pode sobrar pedaço. Represente a fração que cada um irá comer.

Ratos



Coelhos



Cada rato come mais do que cada coelho ☐

Cada rato come menos do que cada coelho ☐

Cada coelho come tanto como cada rato ☐

Figura 4. Problema na situação quociente com o invariante ordem.

Para esse problema um aluno do 4º ano apresentou uma justificativa considerada por nós como válida.

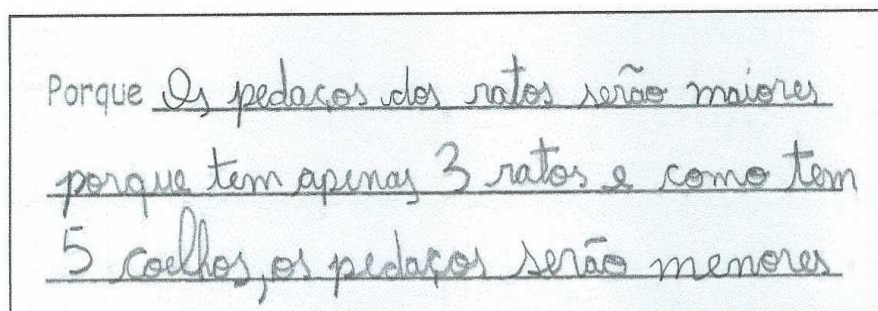


Figura 5. Protocolo do aluno 245 referente à categoria “justificativa válida”.

Analisando a justificativa podemos inferir que esse aluno compreende a ideia que envolve o invariante ordem e parece entender a relação inversa entre o divisor e o quociente. Ao relatar que os pedaços dos ratos serão maiores do que os dos coelhos parece perceber que quanto mais se divide um inteiro, menor ficam as partes.

Foi baixo o número de justificativas válidas, uma vez que o percentual de acerto nas questões de raciocínio foi 24,7% e apenas 6,8% apresentaram justificativas válidas. Esse dado é preocupante, pois mesmo sendo bem baixo o percentual de acerto nas questões de raciocínio, o número de alunos que justificaram corretamente foi ainda menor. Isso nos leva a questionar até que ponto o aluno que selecionou a alternativa correta para as questões de raciocínio tem o conhecimento, mesmo que apresentado de forma intuitiva, dos invariantes ordem ou equivalência. Entre os tipos de situações o índice de justificativas válidas foi bem próximo, tanto para as questões na situação parte-todo (49,3%) quanto para as questões na situação quociente (50,7%).

Quanto às justificativas consideradas por nós como não válidas conseguimos classificá-las em três grupos: os alunos que em lugar de justificar copiaram trechos do enunciado; alunos que justificaram comparando apenas numeradores e os alunos que justificaram comparando apenas denominadores.

A tabela 1 apresenta a visão geral da frequência dos erros por categorias e situações:

Tabela 1

Frequência de erros nas questões de raciocínio, por categorias e situações.

	Trecho do enunciado	Compara numeradores	Compara denominadores
Sit. Parte-todo	64	65	25
Sit. Quociente	77	30	14
Total	141	95	39

Analisando a tabela1, o que nos chama mais a atenção é o número total de justificativas em que os alunos apenas copiaram parte do enunciado (141) e o número de justificativas por situação, na categoria de comparar os numeradores que foi mais do que o dobro de uma situação para outra.

Para compreendermos melhor iremos exemplificar essas categorias:

- Cópia de trechos do enunciado – nessa categoria consideramos as justificativas nas quais alunos copiaram parte do enunciado do problema ou parte da questão de raciocínio. O problema a seguir apresenta uma situação em que se comparam dois casos da situação parte-todo:

Duas meninas irão dividir igualmente 1 barra de chocolate e não deve sobrar nada. Quatro meninos também irão dividir igualmente 2 barras de chocolate sem sobrar chocolate. Os chocolates são idênticos. Represente a fração que cada um irá receber.





☐
☐
☐

Cada menina irá comer mais do que cada menino
 Cada menino irá comer mais do que cada menina
 Cada menina irá comer tanto como cada menino

Figura 6. Problema na situação quociente com o invariante equivalência.

Um aluno do 5º ano seleciona a última alternativa e no lugar de justificar o porque de sua escolha descreve exatamente o conteúdo da alternativa, conforme mostra a figura a seguir:



Figura 7. Protocolo do aluno 113 referente ao grupo “cópia de trechos do enunciado”.

Nesse caso, consideramos que não é possível afirmar se o aluno compreendeu ou não o conceito de equivalência, uma vez que essa seria a alternativa correta, mas não foi possível identificar o que o levou a chegar a essa conclusão. Justificativas como essa foram as mais comuns, correspondendo a mais da metade (51,3%) dos três grupos de respostas categorizadas por nós. Ao comparar por tipo de situação, os índices foram próximos: 45,4% na situação parte-todo e 54,6% na situação quociente.

- Compara apenas os numeradores: nesse grupo os alunos justificam dizendo quem comeu mais ou menos parte ou justificam em relação à quantidade de objetos a ser dividido. No problema a seguir é explorado o invariante equivalência em duas situações parte-todo:



Figura 8. Problema na situação parte-todo com o invariante equivalência.

A justificativa de um aluno do 5º ano para o problema mencionado acima foi a seguinte:

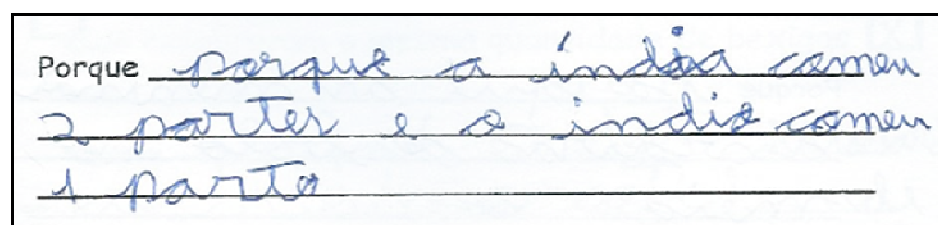


Figura 9. Protocolo do aluno 178 referente à categoria “compara apenas o numerador”.

Apreciando essa justificativa temos que o aluno analisou apenas a quantidade de “partes” que cada índio comeu e não considerou o “tamanho das partes”. Nesse sentido, observamos que esse estudante não reconheceu a relação das partes com o todo referência. Observamos nesse exemplo, que os teoremas em ação utilizados por esses estudantes são os mesmos empregados quando quantificam números naturais. Nos parece que estes estudantes “discretizaram” essa grandeza contínua a fim de estabelecer relações entre as quantidades de “pedaços”.

Como visto anteriormente, na situação parte-todo foi categorizado 68,4% desse grupo de resposta enquanto na situação quociente foram 31,6%. Temos a hipótese de que o número elevado de respostas desse grupo na situação parte-todo possa ser influenciado pela maneira que, frequentemente, enunciamos os problemas nessa situação. É muito comum enunciarmos, por exemplo, que uma pessoa “comeu tantas partes” de um todo e a pergunta realizada é “o quanto essa pessoa comeu?”. Esse tipo de pergunta não acontece na situação quociente, na qual temos, por exemplo, uma quantidade a ser dividida por um número de pessoas e a questão solicitada é o quanto cada pessoas irá ganhar.

- Compara apenas os denominadores: nesse grupo os alunos justificam dizendo quem cortou em mais ou menos partes ou justificam analisando a quantidade ou número de pessoas que irão dividir algo.

Podemos exemplificar esse tipo de justificativa considerando o mesmo problema enunciado anteriormente e temos como resposta o seguinte protocolo de um aluno:

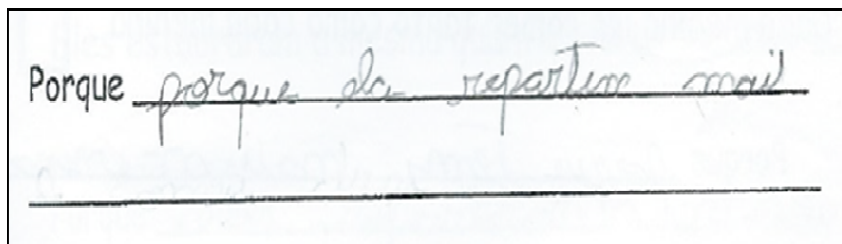


Figura 10. Protocolo do aluno 161 referente à categoria “compara apenas o denominador”.

Esse aluno do 6º ano, seleciona a alternativa em que a índia irá comer mais e justifica dizendo que ela dividiu em mais partes a sua pizza. Nessa justificativa também há foco na quantidade e não na relação entre parte e o todo.

Para esse grupo de justificativas o índice foi maior na situação parte-todo (64,1%) do que na situação quociente (35,8%). Mais uma vez encontramos uma incidência maior desse argumento entre os alunos que responderam a situação parte-todo. Esse dado nos faz refletir sobre os resultados de pesquisas (Mack, 1990, Streefland, 1991 e Nunes et al 2004) que indicam ser mais natural compreender questões de raciocínio na situação quociente.

Nessa análise das justificativas dos alunos (válidas ou não) podemos pensar no que Vergnaud (2001) relata sobre as duas classes de situações: uma em que o sujeito dispõe de repertório necessário para o tratamento imediato de uma situação e outra em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um maior tempo de reflexão. Os alunos, na tentativa de responder corretamente as questões propostas, buscam em seus conhecimentos construídos uma solução para tal problema. Nesse sentido, observamos que possivelmente muitos alunos que se equivocaram se apoiaram na ideia de quantidade e não na relação entre as quantidades (em muitos casos da situação parte-todo). Sobre essa temática concordamos com os estudos que indicam que muitas dificuldades dos alunos que iniciam o trabalho com frações na sua aprendizagem são relacionadas ao fato de não considerarem a fração como um número e sim a sobreposição de dois números naturais.

Nesse trabalho identificamos teoremas em ação que, segundo Vergnaud (1998) é uma proposição na qual o sujeito toma como verdadeira sobre o real, podendo ser essa falsa ou não. Essa ideia é ilustrada neste estudo por meio das justificativas que se baseiam na análise da quantidade de pedaços

Em nosso experimento foi possível identificar que as justificativas apresentadas, sejam as válidas e não válidas- mostraram-se ser de natureza empírica. Tal fato nos ajuda a compreender a complexidade presente nos processos de ensino e aprendizagem das frações, sobretudo, quando tratamos dos invariantes equivalência e ordem. Há necessidade também de focalizar mais situações que levem o estudante a refletir sobre a relação inversa entre o divisor e o quociente, pois essa ideia parece não ter se consolidado para o grupo investigado. Observamos ainda que mesmo quando nossos alunos apresentam justificativas válidas sobre equivalência e ordem há necessidade de ampliar e consolidar esse conhecimento.

Considerações Finais

Da mesma forma que estudos como os de Hart (1981), Behr, Wachsmuth, Post, Lesh (1984) e Mack (1995), dentre outros, apontam equívocos dos alunos ao aplicarem propriedades dos números naturais em problemas de frações, as respostas apresentadas pelos estudantes

investigados nesse estudo nos permitiu identificar que a maioria das justificativas eram equivocadas e referiam-se a comparação entre frações pela análise dos numeradores ou denominadores como se fossem dois números naturais os quais poderiam ser analisados separadamente: ora com foco no “tamanho do pedaço”, ora na “quantidade de pedaços”.

Nesta investigação há indicações sobre a utilização de conhecimentos informais pelos estudantes. Todavia os resultados nos permitem refletir sobre o papel fundamental que o professor deve assumir, uma vez que o conhecimento informal identificado neste estudo não se amplia facilmente no decorrer dos anos. Dessa forma, há necessidade de se investigar mais sobre como favorecer, durante as aulas de matemática, o processo de reflexão dos invariantes ordem e equivalência de números fracionários.

Referencias bibliográficas

- Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 323-341.
- Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.
- Canova, R. F. (2013). *Um Estudo das Situações Parte-todo e Quociente no Ensino e Aprendizagem do Conceito de Fração* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Universidade Bandeirante Anhanguera de São Paulo, São Paulo.
- Garcia Silva, A. F., Campos, T. M. M., Pinheiro, M. G. C., & Souza, M. P. (2013). Situação Quociente: Limites e Possibilidades. In *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática-Retrospectiva e perspectiva*. Curitiba.
- Hart, K.(Ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics* (pp. 11-16). London: Murray.
- Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors: A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Windsor: NFER-Nelson.
- Kieren, T. (1988). “Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development”. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle-grades* (pp. 53-92). Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.
- Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 16-32.
- Mack, N. K. (1995). Confounding whole number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 422-441.
- Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade, J., & Bell, D. (2004). Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. *Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences*, Paper presented in Paris: 28-31, January.
- Nunes, T., & Bryant, P. (2009). *Key understandings in mathematics learning*. Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities. Nuffield Foundation Disponível em <<http://www.nuffieldfoundation.org/reports>>. Acesso em 24 de abril de 2012.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133-170.

- Vergnaud, G. (1993). “Teoria dos campos conceituais”. In L. Nasser (Ed.), *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro* (pp. 1-26).
- Vergnaud, G.. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 167-181.
- Vergnaud, G. (2001). *Didáctica das Matemáticas*. In J. Brun. Lisboa: Instituto Piaget.
- Vergnaud, G.. (2009). A contribuição da psicologia nas pesquisas sobre a educação científica, tecnológica e profissional do cidadão. In M. H. Fávero & C. de Cunha (Orgs.), *Psicologia do conhecimento: o diálogo entre as ciências e a cidadania*. Brasília: UNESCO: Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília: Líber Livros Editora.