



Atividades investigativas para o ensino médio por meio do uso de um material didático manipulável

Renata Cristina Geromel Meneghetti

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo
Brasil

rgcm@icmc.br

Ricardo Kucinkas

Brasil

ricardo.kucinkas@gmail.com

Tiago dos Santos Junior

Departamento de Engenharia de Materiais, Universidade Federal de São Carlos

Brasil

tsjrl@hotmail.com

Resumo

Neste trabalho objetivamos apresentar e discutir sobre um conjunto de atividades didáticas de Matemática para alunos do ensino médio, por meio da utilização de um material didático manipulável (MDM) e da abordagem metodológica de investigação matemática. As atividades foram elaboradas para serem utilizadas com um material didático manipulável denominado de Tábua Quadriculada Geoplanar. Seguindo uma abordagem qualitativa de investigação, um conjunto dessas atividades, sobre análise combinatória, foi aplicado a alunos do ensino médio em uma escola pública brasileira. Desta aplicação observamos que o material e a abordagem utilizados foram importantes para auxiliar na resolução das atividades, na percepção dos erros cometidos e principalmente na compreensão dos conceitos matemáticos focados. Por fim, com o trabalho apresentado pretendemos também contribuir com proposta de utilização de MDM neste nível de ensino, por meio de abordagens alternativas, tal como a investigação matemática.

Palavras chave: material didático manipulável, ensino médio, investigações matemáticas, análise combinatória.

Introdução

Materiais didáticos manipuláveis são amplamente utilizados no ensino de Matemática, especialmente nos anos iniciais de estudo desta área. Devido à possibilidade de vivenciar de forma concreta a aplicação de conhecimentos matemáticos abstratos, este tipo de material tem conquistado um espaço importante no contexto da educação matemática, pois sua utilização pode tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e favorecer a compreensão dos conteúdos abordados. Aliado a isso investigações matemáticas é uma abordagem metodológica que pode também ser utilizada para auxiliar no processo de construção e compreensão do conhecimento.

Neste contexto, este trabalho tem por objetivo apresentar e discutir sobre uma proposta de atividades didático-pedagógica, de caráter investigativo, para o ensino médio¹ com o uso de um material didático manipulável, a TQG (Tábua Quadriculada Geoplanar).

A “Tábua Quadriculada Geoplanar” (TQG) foi desenvolvida em projetos do grupo EduMatEcoSol (coordenado pela Profa. Renata C.G. Meneghetti, primeira autora desse trabalho). Mais especificamente seu processo de criação foi inerente ao desenvolvimento de dois projetos de iniciação científica, um com a participação de Ricardo Kucinskas (Licenciatura em Matemática/UFSCar) e outro com a participação do aluno Tiago dos Santos Junior (Engenharia de Materiais/UFSCar); respectivamente segundo e terceiro autores desse trabalho. Como foram identificados aspectos inovadores, especialmente associados ao ineditismo do material quanto à sua forma e versatilidade, foi realizado depósito de pedido de patente junto ao Instituto Nacional de Propriedade Industrial (INPI), sob número BR1020130068101. A partir da TQG, elaboramos uma proposta de atividades didático-pedagógicas para sua utilização no ensino médio da Educação Básica, as quais serão apresentadas e discutidas neste artigo.

Para a elaboração da proposta mencionada (tendo como recurso didático o material desenvolvido), levamos em consideração os pressupostos de atividade investigativa. Além disso, a proposta inicialmente focaliza o caráter mais intuitivo do conhecimento e progressivamente visa-se atingir uma sistematização maior (aspecto lógico do conhecimento) para aquisição dos conceitos matemáticos envolvidos. O material é organizado dessa maneira, pois se entende “(...) que o intuitivo apoia-se no lógico e vice-versa, em níveis cada vez mais elaborados, num processo gradual e dinâmico, em forma de espiral.” (Meneghetti, 2009). Com isso, temos também como propósito contribuir com oferecimento de materiais didáticos, acompanhados de propostas pedagógicas inovadoras que visem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de Matemática no ensino médio da Educação Básica.

Referencial teórico

Sobre a utilização de Materiais Didáticos Manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem de Matemática

Neste trabalho, estamos entendendo materiais didáticos manipuláveis como aqueles que os alunos podem manipular por meio do tato (da experiência), compreendendo materiais concretos, atividades experimentais, jogos etc.

O uso dos materiais didáticos manipuláveis no ensino e aprendizagem de matemática tem longa história. Pestalozzi, no início dos anos 1800, reportou o uso destes materiais com a finalidade do ensino de Matemática. De acordo com Pestalozzi, a partir do uso dos sentidos e da

¹ O ensino médio brasileiro constitui-se de três anos e é a última etapa da Educação Básica.

experiência com o físico, as crianças aprendiam. Desta forma, ele dizia que “as coisas venham antes das palavras, e o concreto venha antes do abstrato” (Uribe-flórez, 2009). Na década de 1930, inicia-se um grande movimento de uso de materiais manipuláveis em sala de aula, levando-os a serem considerados nos currículos das escolas de ensino básico. Embora o uso deste tipo de material foi ampliado a partir dos anos 30, ainda não existia um mecanismo que permitisse avaliar sua efetividade. A sistematização dos mecanismos de avaliação da efetividade destes materiais só se tornou preocupação entre 1960 e 1970, quando se comparavam os resultados do uso de materiais concretos e pictóricos com o uso de materiais tradicionais. (Sowell, 1989). A partir da década de 70, diversos autores investigaram a eficácia dos materiais didáticos manipuláveis quando estes foram utilizados para se ensinar e aprender matemática. As observações sempre convergem para o mesmo ponto: os melhores resultados de ensino e aprendizagem são alcançados quando o material didático manipulável é utilizado sob os cuidados de um professor.

Nacarato (2005) aponta que, para que um material didático manipulável impulse a aprendizagem de matemática, é preciso também considerar a forma como esse objeto didático é utilizado, bem como as concepções pedagógicas do professor. Alunos não adquirem imediatamente os conceitos matemáticos com o uso de materiais manipuláveis. A instrução extensiva e a prática, com orientação do professor, são necessárias para que os resultados sejam efetivos. (Ball, 1992). Com base na indicação de professores e pesquisadores, Uttal, Scudder, & Deloache (1997) reconheceram que objetos concretos permitem ao aluno estabelecer conexões entre suas experiências diárias e seu aprendizado sobre conceitos e símbolos matemáticos, tornando este tipo de recurso um caminho concreto para a aprendizagem de conceitos e símbolos abstratos. Tooke et al.(1992) observaram que professores de Matemática ao redor do mundo apontam que a aprendizagem da Matemática é facilitada quando se experimentam os conceitos com auxílio de materiais manipuláveis. Este tipo de recurso didático tem sido recomendado para alunos de todos os níveis, como forma de potencializar o desempenho e desenvolver a capacidade de relacionar os conhecimentos matemáticos abstratos com a resolução de problemas do cotidiano (Peterson, Mercer, & O’Shea, 1988).

Nós entendemos que em atividades de ensino e aprendizagem de matemática, a utilização de materiais didáticos manipuláveis (MDM) pode ser vista como facilitadora da aprendizagem, pois pode estimular o aluno a participar da aula e a compreender o conteúdo focado. Como apontado por Araújo (2000, p.15) o uso de recursos lúdicos pode fazer com que as aulas de matemática se tornem “[...] dinâmicas e prazerosas facilitando assim o ensino-aprendizagem e levando o aluno a se apropriar do conhecimento, vivenciando, experimentando e se tornando uma pessoa autônoma para poder aplicar seus conhecimentos na vida.”. No entanto, corroboramos com a ideia de que a utilização dos MDM, incluindo aqueles que favorecem atividades lúdicas, pode auxiliar na aprendizagem, desde que bem elaborados e utilizados adequadamente, tendo em vista ações objetivas de ensino. Em relação às atividades didático-pedagógicas elaboradas para o uso da TQG, nos preocupamos também em criar de caráter investigativo a fim de suscitar ações do aluno visando à construção do conhecimento. Isto porque concordamos com Schliemann et al. (1992, p. 101) (*apud* Nacarato, 2004-2005) de que “Não é o uso específico do material concreto, mas sim o significado da situação, as ações da criança e sua reflexão sobre essas ações que são importantes na construção do conhecimento matemático”.

Sobre Investigação Matemática

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), “Investigar é procurar conhecer o que não se sabe”. Ponte (2003) entende a Investigação como uma procura direcionada e técnica que visa o aprofundamento em alguma coisa ou mesmo a descoberta de um assunto; que pode favorecer o ensino. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), investigar também é descobrir relações entre os objetos matemáticos, tanto os conhecidos como os desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades. Para Ernest (1991), uma investigação matemática tem como ponto de partida uma questão ou uma situação matemática; o foco de uma atividade pode mudar assim que novas questões são levantadas, e novas situações são geradas e exploradas. Sobre o mesmo tema, o matemático inglês Andrew Wiles ressalta a importância da metodologia de investigação matemática como veículo de motivação para os alunos construírem conhecimento matemático. (Ponte et al., 2003)

Esses autores ainda explicitam quatro momentos principais de uma investigação matemática: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulação; justificação e avaliação. De acordo com Ponte e Matos (1996), a investigação matemática apresenta algumas semelhanças com a resolução de problemas, pois ambas envolvem raciocínio complexo, empenho e criatividade. Esses mesmos autores também apontam algumas diferenças na investigação, a saber, os objetivos são menos definidos e a finalidade não é apresentada de antemão, apresenta-se uma situação e o aluno então passa a formular conjecturas para investigar. Uma investigação matemática desenvolve-se geralmente em torno de um ou mais problemas. O primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a ser resolvido, por isso não é de se admirar que, em matemática, exista uma relação muito próxima entre problemas e investigações. De acordo com Ponte et al. (2003), é possível programar o início da investigação, porém o seu término é imprevisível. Isso porque alguns elementos como o percurso seguido pelos alunos, seus avanços, recuos, divergências que podem surgir durante a investigação e respostas diante das intervenções do professor podem influenciar bastante no resultado final da investigação.

Para Serrazina *et al.* (2002), neste tipo de atividade “é importante apresentar aos alunos um conjunto de propostas de trabalho interessantes, que envolvam conceitos matemáticos fundamentais e ofereçam aos alunos oportunidades para experimentar, discutir, formular, conjecturar, generalizar, provar, comunicar as suas ideias e tomar decisões.” Acrescenta-se ainda que, segundo Ponte (2003), uma tarefa investigativa pode ser contextualizada numa situação real ou formulada em termos puramente matemáticos. Portanto, percebe-se que as investigações matemáticas referem-se a situações-problema desafiadoras e abertas, permitindo aos alunos apresentarem várias formas de explorar e investigar o problema. Para Fiorentini et al. (2005), a utilização de tarefas investigativas nas aulas de matemática constitui uma perspectiva de trabalho pedagógico da qual o professor pode lançar mão para a realização de um ensino significativo da matemática.

Ainda de acordo com esses autores, o professor precisa estar atento ao processo de formulação e teste de conjecturas pelos alunos, a fim de garantir que eles evoluam na investigação. Para tal, o professor poderá fazer questões que estimulem os alunos a verificar outras formas de realizar as atividades e a refletir sobre o que estão fazendo. Ainda segundo esses autores, é fundamental que o professor leve os alunos a compreender o caráter provisório das conjecturas; eles precisam compreender que não basta somente que uma conjectura passe por vários testes, esse fato não implica que a conjectura seja válida ou que a investigação esteja

concluída. Ou seja, deve ser feito também um trabalho cuidadoso para que a quarta etapa das atividades investigativas (a justificação) seja também contemplada.

Assim, as atividades elaboradas possuem caráter investigativo porque possibilitam a formulação de conjecturas e ideias diversas, dependendo dos conhecimentos prévios de cada aluno e da intervenção do educador. Além disso, as atividades foram elaboradas como proposta de uso de um material didático pedagógico por nós criados denominado de “Tábua Quadriculada Geoplanar” (TQG), sobre a qual abordaremos no que segue.

Sobre a TQG

A Tábua Quadriculada Geoplanar (TQG), material didático focado neste artigo, foi idealizada pelos autores desse trabalho. O processo de criação deste material ocorreu com os projetos de iniciação científica do segundo e do terceiro autores deste trabalho.

A TQG pode ser compreendida como uma tábua fina e devidamente graduada, projetada para ser confeccionada em madeira ou outro material resistente, com sequências de chanfros que formam uma malha, na qual atividades semelhantes às do Geoplano poderão ser desenvolvidas. Dessa maneira, podemos dizer que este material tem potencial pedagógico para abordar fundamentos de **álgebra** e de **geometria**. Embora atividades semelhantes às aquelas realizadas no Geoplano possam ser executadas na TQG, devido às características de nosso material, ainda há outras possibilidades de exploração. As principais características da TQG são suas malhas: estas são obtidas por meio de chanfros (saliências de baixa profundidade) ou traços levemente pintados no mesmo plano da superfície original. No caso da madeira, por exemplo, por meio dos chanfros, será possível fixar lã ou uma linha mais grossa (como o barbante) nessas saliências a fim de desenvolver as mais variadas atividades didático-pedagógicas. As faces da TQG são lisas e por isso, independentemente do tipo de marcas que o material apresenta, será possibilitada a escrita com canetas apropriadas, o que permitirá o trabalho com atividades diversas por meio de representações geométricas; tais como atividades envolvendo polígonos, eixos cartesianos, matrizes, sólidos geométricos, entre outras. Além das maiores possibilidades de exploração, a TQG possui vantagens também nos aspectos físicos, pois trata-se de um objeto mais seguro para a manipulação, sustentável e motivador da aprendizagem matemática.

A partir da idealização da TQG, começamos a elaborar atividades investigativas para o Ensino Médio da Educação Básica. Como já mencionado, este material apresenta grande potencial para desenvolvimento de conteúdos referentes a este nível de ensino, pois abrange as duas principais áreas da Matemática: a Álgebra e a Geometria. Dentre esses conteúdos gerais, destacamos outros mais específicos para serem trabalhados por meio da utilização da TQG para o Ensino Médio, a saber: estudo de funções por meio do esboço de gráficos de diversos tipos (funções lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas dentre outras); construção de matrizes e determinantes; análise combinatória e probabilidade; sequências numéricas, números complexos; trigonometria, estudos de geometria plana, analítica e espacial.

Neste trabalho, apresentaremos e discutiremos um recorte do conjunto de atividades elaboradas que diz respeito à Álgebra, mais especificamente, trataremos de conceitos básicos de Análise Combinatória. Tais atividades foram elaboradas durante o trabalho de iniciação científica do segundo autor deste artigo, sob a orientação da primeira autora e foram aplicadas junto a alunos do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de São Carlos (São Paulo, Brasil).

Aspectos Metodológicos

A gênese da TQG se deu a partir de uma extensa revisão de literatura sobre os materiais didáticos manipuláveis atualmente utilizados para se ensinar e aprender matemática. Nesta revisão, identificamos dois aspectos importantes. Primeiramente, os materiais disponíveis eram destinados ao ensino de conteúdos de apenas uma das grandes áreas de conhecimentos, como álgebra ou geometria. Em segundo lugar, boa parte dos materiais tinham formatos tabulares. A partir destas observações, levantamos as necessidades da elaboração de um novo material: apresentar versatilidade, portabilidade, ergonomia, facilidade de produção e baixos custos. Adicionalmente, deveria se pensar em materiais que pudessem ser utilizados em distintos níveis de ensino. Temos observado que os materiais didáticos manipuláveis são mais utilizados nas séries iniciais. No Ensino Médio, estes materiais são, muitas vezes, desconsiderados no processo de ensino e aprendizagem, embora apresentem fatores favoráveis ao seu uso em qualquer dos níveis. Como discutido, materiais didáticos manipuláveis oferecem aos alunos a possibilidade de aplicar a teoria em situações concretas, motivando-os ao estudo da matemática.

Com a definição das características que um novo material deveria apresentar, iniciamos um processo de exercício criativo, visando idealizar um material inovador. Depois de idealizado, o projeto gráfico do material foi construído, e acima deste projeto, aspectos físicos e didáticos foram discutidos, fazendo com que aperfeiçoamentos fossem realizados no projeto inicial. Depois disso, foram construídos protótipos da TQG, que foram direcionados para testes de validação didática. Para tanto, uma série de atividades foram criadas para serem desenvolvidas especialmente com a TQG. Entre essas, estão as que foram focalizadas nesse trabalho.

A aplicação do conjunto de atividades didático-pedagógicas (apresentada a seguir) foi antecedida por um diagnóstico inicial, realizado individualmente pelos alunos, com o propósito de identificar algumas das dificuldades deles quanto aos conceitos matemáticos que trabalharíamos sobre esse tema. Num segundo momento, foram formados grupos de até 5 alunos para o desenvolvimento das questões apresentadas. Lembramos a eles que poderiam trocar informações entre si e, eventualmente, recorrer aos aplicadores das atividades para alguma orientação. Vale ainda salientar que, em relação à aplicação das atividades, primeiramente nos pautamos nos conhecimentos prévios dos alunos, identificados pelo diagnóstico inicial. Além disso, em relação à resolução das atividades, os alunos buscavam investigar e resolver as atividades propostas, por meio da livre exploração da TQG e podiam também utilizar outros materiais para consulta, como, por exemplo, livros didáticos ou algum outro fornecido pelo professor. Depois, os professores orientadores da atividade coordenaram uma discussão sobre as hipóteses levantadas e os resultados alcançados, motivando-os os alunos a formalizarem os conceitos por meio da linguagem matemática. Assim, foi possível acompanhar e observar os grupos, como o intuito de coletar registros para essa análise. Por fim, aplicamos um diagnóstico final, para nos ajudar quanto à análise da potencialidade da atividade desenvolvida, ou seja, a fim de comparar com o diagnóstico inicial e verificar se houve ou não diferenças significativas em relação aos conceitos abordados.

Sobre as atividades elaboradas e sua aplicação

A seguir, apresentamos um conjunto de atividades didático-pedagógicas elaboradas para alunos do ensino médio. Esse conjunto de atividades teve por objetivo trabalhar, por meio da manipulação da TQG, os principais conceitos da Análise Combinatória, utilizando para isso uma proposta de atividades com caráter investigativo que ajudassem os alunos a construir um

conhecimento matemático significativo para eles, isto é, favorecendo uma aprendizagem significativa. A título de ilustração no que segue apresentamos a ficha de atividades que teve referente a arranjo e permutação.

ATIVIDADE SOBRE ARRANJO E PERMUTAÇÃO

Considere um dos lados dessa tábua como sendo um plano cartesiano finito, formado por: dois eixos ortogonais (eixos x e y) posicionados da maneira que você considerar conveniente; e pelas linhas horizontais e verticais da malha quadriculada desse material.

Procure definir da maneira que achar mais conveniente, os eixos das ordenadas e abscissas. Qual o número total de pontos (com coordenadas inteiras) que podemos formar no terceiro quadrante dessa tábua? E no segundo quadrante? E na tábua completa?

Agora, defina os eixos do plano cartesiano, de forma que ocorra simetria em relação a ambos os eixos. Neste caso, qual o número total de pontos (com coordenadas inteiras) que podemos formar no primeiro quadrante? E no quarto quadrante? E na tábua completa?

Imagine um plano cartesiano finito e simétrico que contenha apenas três pontos (com coordenadas inteiras) em cada um dos eixos. Por exemplo, no eixo y , teríamos: o ponto $O(0,0)$ no centro, um ponto A acima de O e um ponto B abaixo de O . Neste caso, qual o número total de pontos que podemos formar no primeiro quadrante, por exemplo?

Você utilizou a fórmula de Arranjo para solucionar o item anterior? Caso não tenha utilizado, você acredita que seria possível resolver o item anterior por meio desta fórmula? Tente fazer isso!

Figura 1. Ficha de atividades referentes a arranjos e permutações.

Na ficha de atividades, constavam também os seguintes as seguintes instruções:

- (1) As tarefas a seguir deverão ser desenvolvidas com o auxílio do material recebido.
- (2) Os raciocínios e procedimentos realizados deverão ser registrados com detalhes na folha entregue por seus professores.
- (3) Lembre-se de registrar todos os passos e raciocínios e não somente o resultado final.
- (4) Todos os registros devem ser feitos à caneta e sem rasuras. Caso haja algum raciocínio que você julgue incorreto, circule-o para desconsiderá-lo.

Discussão dos resultados referentes à aplicação

Em relação à resolução das atividades, de forma geral, pudemos perceber que os alunos se dedicaram à realização das atividades e estavam dispostos a compreender os conceitos relacionados a cada questão. Observou-se ainda que a maioria conseguiu uma melhor compreensão das ideias conceituais trabalhadas, em virtude da concretização proporcionada pela TQG, tornando mais explícitos alguns conceitos abstratos, tais como as ideias de Arranjo, Combinação e Permutação. No que segue, analisaremos alguns dos principais momentos vivenciados durante tal aplicação, cujos dados apresentados também foram obtidos por meio de fotos, anotações dos próprios aplicadores e vídeos. Para isso, também serão apresentados alguns comentários dos próprios alunos sobre a resolução de algumas questões, retirados do Diagnóstico Final.

Duas alunas de um mesmo grupo responderam que arranjo é o “agrupamento de elementos”, no qual importa a ordem em que são escolhidos tais elementos. Na Combinação, todos os alunos responderam que a ordem dos números não importa.

Por meio da afirmação da Carol, percebemos que a aprendizagem foi eficiente quanto a essa percepção conceitual sobre a Análise Combinatória.

Outro aluno, o Alex, respondeu que “arranjo é uma maneira mais precisa de você obter um resultado, o qual poderia ficar mais tempo buscando uma solução” e que combinação “é uma forma que você utiliza para obter resultados mais rápidos”. Este aluno não apresenta as definições conceituais de Arranjo e Combinação; no entanto, seu comentário destaca a importância da fórmula matemática para Arranjo e Combinação como forma de tornar os cálculos mais rápidos e precisos. Após nossas orientações quanto às dúvidas pontuais dos alunos, estes afirmaram terem compreendido a maior parte dos conceitos trabalhados, salientando a importância da TQG, como podemos observar por meio dos comentários apresentados abaixo. Os nomes utilizados são fictícios.

“A tábua foi importante para ter uma melhor visualização do plano cartesiano.”

MARI

“Ótimo, pois com ela pode-se ter a certeza sobre os gráficos [representações geométricas] que foram dados aos alunos. É uma boa ferramenta de auxílio.”

BRENO, colchetes nossos

“Na minha opinião, a tábua foi muito utilizada e bastante útil. Ela ajudou a identificarmos mais facilmente alguns erros cometidos, além de ter tornado a atividade mais simples e visível.”

LUIZ HENRIQUE

A tábua é um objeto bem interessante. Nunca tinha visto e ela ajuda e deixa bem mais fácil a interpretação dos gráficos [representações] cartesianos.

RENATO

colchetes nossos.

Por meio desses depoimentos, percebemos que todos os alunos consideraram a TQG útil e prática. No entanto, Joice (apesar de ter afirmado entender “com mais facilidade com a tábua”) comentou que em “Algumas questões não entendia utilizando a tábua.”. Esse comentário nos remete à barreira inicial que enfrentamos, a saber, uma resistência dos alunos em realizar atividades de caráter investigativo por meio da utilização de materiais didático-manipuláveis (MDM). Nesse sentido, outra aluna declara que nenhum professor dela utilizou algo parecido (como a tábua) para ensiná-los. Por isso, entendemos que, num primeiro momento, tais alunos preferiram fazer as atividades sem a TQG. Assim, durante as aplicações, alguns reclamaram do material, dizendo que dava muito trabalho ter que desenhar na tábua (com lápis ou barbante). Todavia, no decorrer das atividades, esses mesmos alunos perceberam a importância do MDM para resolver os exercícios propostos e passaram a utilizar a TQG, a fim de auxiliar o raciocínio necessário às questões apresentadas e começaram também a se envolver e se familiarizar mais com a abordagem utilizada. Esse fato pôde ser constatado pelas afirmações de diversos alunos que salientaram a praticidade e utilidade da TQG:

“(…) muito mais prático de se usar tábua (...) é melhor para todos verem e entenderem.”

JEFERSON

“(...) foi muito útil porque com ela conseguimos ter uma noção mais ampla de como montar um plano cartesiano (...).”

ALEXANDRE

Assim, entendemos que os alunos gostaram de ter manipulado a TQG durante o desenvolvimento das atividades propostas. Eles salientaram algumas das características desse material, tais como: sua praticidade, a visualização do plano cartesiano, a utilidade para resolver as questões, a facilidade para identificar possíveis erros cometidos nos cálculos, bem como o auxílio para a interpretação de representações cartesianas. Angelina lembra ainda uma das mais importantes características desse material: esclarecer por meio de sua manipulação alguns dos conceitos abstratos da matemática, como é o caso da Análise Combinatória. Segundo as palavras desta aluna, a tábua serviu para: *“podermos enxergar os arranjos e combinações de uma forma mais explícita.”* A abordagem metodológica utilizada também favoreceu o engajamento dos alunos na utilização do material, na resolução e discussão das atividades e por fim na compreensão dos conceitos envolvidos.

Por fim, tais análises mostraram que atingimos nosso propósito. Pois, nossa intenção principal para essas atividades era trabalhar, os principais conceitos da Análise Combinatória, favorecendo uma aprendizagem significativa aos alunos.

Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo apresentar e discutir sobre uma proposta de atividades didático-pedagógicas para o ensino médio de matemática, com o uso do material didático manipulável TQG e da metodologia de investigação matemática.

As atividades foram aplicadas com alunos do ensino médio e os resultados desta aplicação permitiram perceber que apesar de ter ocorrido uma resistência inicial tanto ao uso do material didático manipulável quanto à abordagem metodológica utilizada, aos poucos os alunos foram se envolvendo com a resolução da atividade de forma que se observou uma maior compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Assim, a utilização da TQG por meio da metodologia de investigação matemática mostrou ser uma abordagem eficiente no processo de ensino e aprendizagem de matemática para o ensino médio nos conteúdos focalizados.

Como afirmaram os próprios alunos, a TQG auxiliou a visualização do plano cartesiano, a resolução/investigação do problema proposto, a facilidade para identificar possíveis erros cometidos nos cálculos, bem como o auxílio para a interpretação de representações cartesianas, além de esclarecer alguns dos conceitos abstratos da matemática, como é, em geral, o caso dos conceitos Análise Combinatória.

Isto parece indicar que a utilização de materiais didáticos manipulativos pode tornar-se ainda mais potente do ponto de vista didático-pedagógico quando incorporado a abordagens alternativas de ensino, como a de investigação matemática que foi focada neste trabalho.

Agradecimentos

À FAPESP (Fundação de amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo/Brasil)²; ao PIC/SMA (Programa de Iniciação Científica do Departamento de Matemática do ICMC/USP) e ao

² FAPESP (processo 2010/05424-5).

Programa de Educação Tutorial em Economia Solidária da UFSCar.

Referências e bibliografia

- Araújo, I. R. O. (2000). *A utilização de lúdicos para auxiliar a aprendizagem e desmistificar o ensino da matemática*. Universidade Federal de Santa Catarina.
- Ball, D. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, 16(1), 46–47.
- Ernest, P. (1991). Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In *The Philosophy of Mathematics Education (Investigations, Problems Resolution and Pedagogy)*. The Falmer Press.
- Fiorentini, D., Fernandes, F. L. P., & Cristovão, E. M. (2005). Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In *Anais do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* (p. CD-ROM). Porto.
- Meneghetti, R. C. G. (2009). O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática. *Revista BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 22(32), 161–188.
- Nacarato, A. M. (2005). Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática*, 9-9(10), 1–6.
- Peterson, S. K., Mercer, C. D., & O’Shea, L. (1988). Teaching learning disabled students place value using the concrete to abstract sequence. *Learning Disabilities Research*, 4(52-56).
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). Investigar em Matemática. In *Investigações matemáticas na sala de aula* (pp. 13–23). Belo Horizonte: Autêntica Editora.
- Ponte, J. P. M. (2003). Investigar, ensinar, aprender. In *Actas do profMat 2003 - CD ROM* (pp. 25–39). Lisboa.
- Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interações sociais nas investigações matemáticas. In *Investigar para aprender matemática* (pp. 119–1385). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Serrazina, L. ., Vale, I. ., Fonseca, H., & Pimentel, T. (2002). O papel das investigações matemáticas e profissionais na formação inicial de professores. In J. P. et al. Ponte (Ed.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. (pp. 41–58). Lisboa: SEM-SPCE.
- Sowell, E. J. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5), 498–505.
- Tooke, D. J., Hyatt, B., Leigh, M., Snyder, B., & Borda, T. (1992). Why aren’t manipulatives used in every middle school mathematics classroom? *Middle School Journal*, 24, 61–62.
- Uribe-Flórez, L. J. (2009). *Teacher Variables and Student Mathematics Learning Related to Manipulative Use*. Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Uttal, D. H., Scudder, K. V., & Deloache, J. S. (1997). Manipulatives as Symbols : A New Perspective on the Use of Concrete Objects to Teach Mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18(1), 37–54.