



Caracterização em uma Trajetória de Aprendizagem com Funções Trigonométricas

Sonner Arfux de **Figueiredo**

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Brasil

sarfux@uems.br

Nielce Meneguelo **Lobo da Costa**

Universidade Anhanguera de São Paulo

nielce.lobo@gmail.com

Salvador **Llinares**

Universidad de Alicante – UA

España.

sllinares@ua.es

Julia **Valls** González

Universidad de Alicante – UA

España.

juliavalls@ua.es

Resumo

Esta comunicação aborda informações sobre como um experimento de ensino em um entorno tecnológico usando o *Software* GeoGebra ajudou acadêmicos de um Curso de Licenciatura em Matemática a caracterizar a construção do significado de funções trigonométricas.

Fundamentado no processo de equilíbrio de Piaget (1977) procura explicar a aprendizagem profissional pelo mecanismo *hypothetical learning trajectory*. Embasado nas discussões sobre HLT de Simon, Tzur, Heinz e Kinzel (2004) apresentamos a discussão de um episódio sobre o uso de HLT. Os resultados apresentam distintas ideias usando argumentos variados para associar ao gráfico e definição de uma função trigonométrica. Um destes argumentos foi em relação à alteração da posição dos parâmetros na representação da função. Os resultados indicam que as interações dinâmicas com o sistema tecnológico na HLT podem favorecer a generalização necessária para o desenvolvimento de processos de abstração reflexiva que incidem na elaboração do conceito de funções trigonométricas

Palavras chave: funções trigonométricas, processo de generalização, recurso tecnológico,

experimento de ensino, trajetória hipotética de aprendizagem.

Introdução

O ensino e aprendizagem de trigonometria tem sido objeto de debate e investigação nas últimas décadas e constitui uma parte importante nos cursos de Licenciatura de Matemática, servindo como um dos conteúdos de transição da matemática da educação básica para o ensino universitário. Com aplicação incontestável nas diversas áreas das ciências exatas, seu estudo deve: atender a compreensão das ideias e conceitos básicos, a sua aplicação na resolução de problemas e na manipulação nas regras e algoritmos e a sua aplicação no estudo de cálculo, entre outras disciplinas.

Contudo, estudos de Brito e Morey (2004) evidenciam que a trigonometria, quando abordada no Ensino Médio, não explora competências e habilidades para o desenvolvimento da mesma. Em suas pesquisas, os autores evidenciaram que, quando esse estudo é realizado, sua abordagem é superficial, deixando de incluir itens importantes do conteúdo de trigonometria como, por exemplo, no que implica a alteração da posição dos parâmetros na representação de funções trigonométricas, como, $f(x)=2 + \sin(x)$; $f(x) = 2.\sin(x)$ e $f(x) = \sin(2.x)$, ou ainda, como o aluno entende o significado da tangente de x percebendo o x como argumento da tangente e não como um produto de duas variáveis, e a correspondência deste como a medida de arco do círculo trigonométrico tomada em radianos.

Distintas investigações (Lindegger, 2000; Briguenti, 1998; Almeida, 2000; Valente, 2001; Brito e Morey, 2004 e Lobo da Costa, 2004) recomendam a abordagem dos conceitos de trigonometria a partir de (a) situações-problema relacionadas ao cotidiano; (b) trabalho em equipe de modo a permitir a troca de pontos de vista; (c) o uso de instrumentos necessários para visualização e compreensão das funções trigonométricas. Estas pesquisas evidenciam como questão importante estabelecer o domínio, a imagem e as múltiplas representações semióticas de uma função trigonométrica. A trigonometria é um dos conteúdos cujo conceito se inicia no ensino médio e retorna na pauta do curso de Licenciatura em Matemática servindo como base de sustentação para as demais disciplinas do curso como o cálculo, a física, a geometria, a geometria analítica, entre outras.

Alguns estudos didáticos sobre o uso das tecnologias da informação na educação têm se apresentado de forma constante na literatura. Pesquisas assinalam as contribuições do uso desse recurso na aprendizagem de conceitos matemáticos evidenciando que o uso das tecnologias, possibilita o aluno a identificar representações equivalentes na definição de um mesmo conceito, além de favorecer a interação e dinamismo. Entre esses estudos, podemos citar os desenvolvidos por (Borba e Penteado, 2007; Borba e Villareal, 2005; Mira, Valls, Llinares, 2013; Zulatto, 2007 e Barbosa, 2009).

Nosso trabalho se enquadra nas investigações que se preocupam em compreender como o acadêmico constrói os significados em uma situação de aprendizagem com o *Software* GeoGebra em um estudo exploratório do conteúdo de funções trigonométricas e, em particular, de modo a analisar como este ajuda a relacionar a compreensão do argumento de funções trigonométricas no ensino superior.

As investigações a que nos propomos tem a finalidade de explorar a construção do significado do conceito de funções trigonométricas a partir de diferentes registros

(compreensão). Neste aspecto, seguimos Duval (1998) para o qual a compreensão de um conceito requer a coordenação de diferentes registros de representação, pois somente com um registro não se explora toda a complexidade do conceito.

A investigação que apresentamos tem como objetivo identificar:

- Características do processo de construção do significado do conceito de funções trigonométricas;
- Como influencia na construção do significado quando relaciona o gráfico de uma função trigonométrica a partir do deslocamento vertical, sua amplitude, seu domínio e do período dado.

Marco Teórico

Perspectivas construtivistas de aprendizagem têm sido centrais para grande parte do recente trabalho teórico empírico em Educação Matemática de Steffe e Gale, (1995), Von Glasersfeld (1991), e Coll e Solé (2009). Estes autores defendem a concepção construtivista como um instrumento para análise de situações educativas que também pode ser utilizado para a tomada de decisões referentes ao planejamento, aplicação e avaliação do ensino. Para os autores, o Construtivismo favorece o desenvolvimento de situações de aprendizagem ao analisar e buscar recursos que ajudam a compreender por que o aluno não aprende e como o professor deve desenvolver estratégias para tentar ensiná-lo. Simon (1995) destaca que o construtivismo provê preciosas contribuições acerca de como deve ser levado a cabo o processo de aprendizagem para promover mudanças na Pedagogia da Matemática. O autor enfatiza que o construtivismo traz contribuições que vão além do trabalho do professor e aborda temas como currículo na práxis construído em sala de aula, o desenvolvimento de materiais didáticos e a elaboração de pesquisas na área educacional.

Trajetória hipotética de aprendizagem-HLT.

Nesse aspecto nos apoiamos em estudos de Simon, Tzur, Heinz, Kinzel (2004) para explicar o processo de uma HLT. A trajetória se refere aos caminhos que os alunos devem seguir para a construção dos conhecimentos pretendidos pelo professor. Para os autores, o termo "hipotético" compreende duas perspectivas: a que entende que o professor tem acesso apenas às hipóteses dos conhecimentos dos alunos, isto é, não consegue acessar diretamente o conhecimento dos aprendizes e a outra perspectiva, para fazer referência ao prognóstico, à expectativa do professor, a respeito de como a aprendizagem será processada pelos alunos.

O Mecanismo sobre a atividade-efeito é uma reflexão sobre a trajetória hipotética de aprendizagem (*Hypothetical Learning Trajectory*) proposta por Simon, Tzur, Heinz, Kinzel (2004), elaborada a partir das ideias de Piaget (1997, p. 315) sobre abstração reflexiva. Para Piaget (2001), a abstração reflexiva é uma característica do mecanismo de equilíbrio e é "construtiva, e não meramente indutiva ou extensional". A equibração é o processo pelo qual os alunos constroem novas concepções via assimilação e acomodação das concepções anteriores.

Esse mecanismo identifica as fases de elaboração de um novo conceito - a participação no processo no qual o aluno abstrai uma regularidade na relação entre a atividade realizada e o efeito produzido enquanto antecipadamente se refere ao uso da regularidade abstraída em situações distintas da que levou a cabo da abstração. Assim, a base teórica de Simon *et al* (2004),

foi construída a partir de dois conceitos-chave da teoria piagetiana, quais sejam: o de equilíbrio (assimilação e acomodação) e o de abstração reflexiva.

Assim, Simon *et al* (2004) buscaram aspectos da teoria de Piaget (2001) para construir uma teoria da aprendizagem matemática e elaborarem em detalhes um mecanismo para explicar a aprendizagem conceitual que fosse suficiente para subsidiar o ensino da matemática. Simon (1995) desenvolveu o Ciclo de Ensino (Figura 1) para apresentar um modelo esquemático cíclico de inter-relação dos aspectos que representam as relações entre os conhecimentos do professor, pensamento e reflexões e tomada de atitudes. No ciclo em questão, Simon (1995) mostra que quando um determinado tema é desenvolvido em sala de aula, as atividades elaboradas anteriormente podem sofrer ajustes em consequência das observações do professor em relação às atitudes dos alunos. Com isso, a elaboração da HLT pode ser usada na concepção do currículo, podendo fornecer um quadro para conceituar a criação de conjuntos de aulas destinadas a desenvolver um novo conceito.

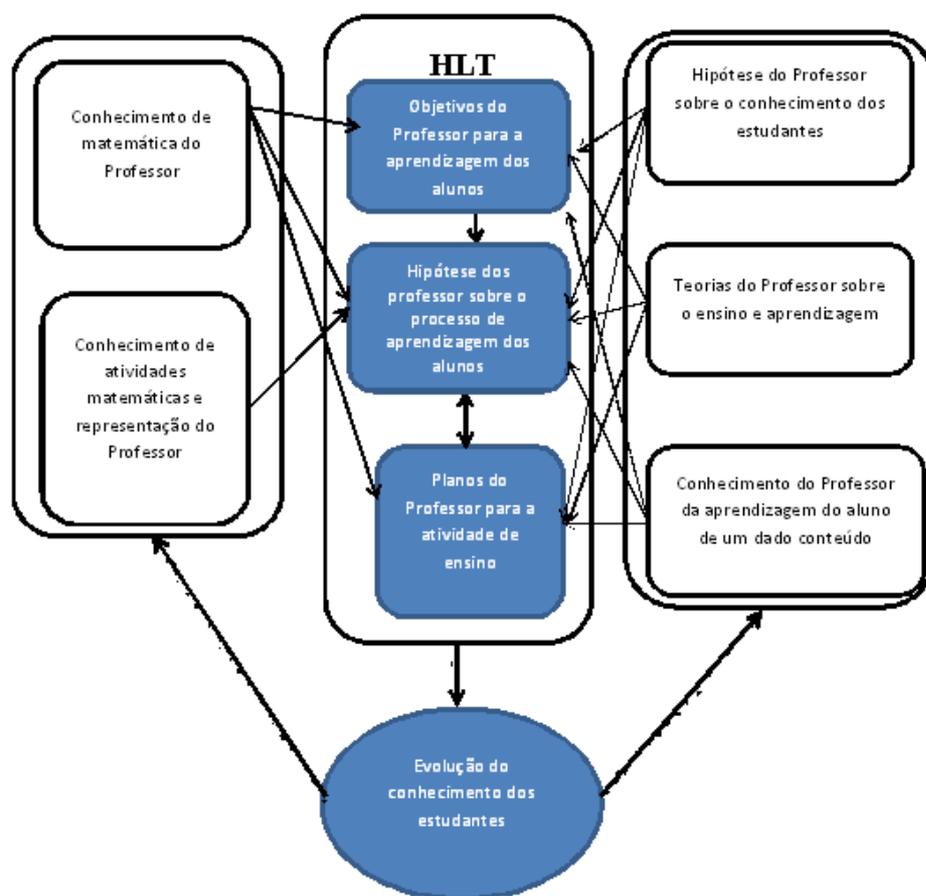


Figura 1. Ciclo de ensino de Matemática. Adaptado (SIMON, 1995, p, 137).

Segundo Simon (1995), os domínios de conhecimento dos professores também podem informar diretamente a avaliação do conhecimento dos alunos; contudo, esta não foi a ênfase do modelo e, a fim de simplificar o diagrama, as flechas não estão incluídas. O ciclo é uma proposta de formulação dos modelos de ensino o qual se parte de um objetivo inicial podendo este muitas vezes ser alterado para melhor se adaptar ao grupo de aprendizes. Segundo Simon (1995), o

professor continua envolvido no ajuste a HLT; às vezes, a ordem se encontra em sintonia, enquanto em outras vezes toda a pressão da lição deve ser descartada em favor de uma ou mais adequação, contudo, o grau de modificação nas alterações realizadas pode ser em qualquer um ou em todos os três componentes da HLT: o objetivo, as atividades, ou o hipotético processo de aprendizagem.

O termo Ciclo de Aprendizagem assim se justifica pois quando o professor tece observações a respeito do uso da atividade e demanda esforços para elaborar novas, o ciclo se inicia, caracterizando assim as relações cíclicas. A noção de uma trajetória hipotética de aprendizagem não se destina a sugerir que o professor sempre persegue um objetivo de cada vez ou que só uma trajetória é considerada, pelo contrário, ela serve para sublinhar a importância de ter um objetivo e justificativa para as decisões de ensino e a natureza hipotética de tal pensamento. Esse mecanismo identifica as fases de elaboração de um novo conceito - a participação no processo no qual o aluno abstrai uma regularidade na relação entre a atividade realizada e o efeito produzido enquanto antecipadamente se refere ao uso da regularidade abstraída em situações distintas da que levou a cabo da abstração.

Na HLT entra em cena a maneira em que se caracteriza o mecanismo de reflexão sobre a relação atividade-efeito, ou seja, a relação atividade-efeito começa quando o estudante resolve uma determinada tarefa (objetivo do estudante) que determina uma série de ações mentais que dependem de seu conhecimento prévio. *“É na ação mental, se há ou não atividade física envolvida, que é a base para a aprendizagem conceitual.”* (SIMON *et al*, 2004, p. 94). Para alcançar seu objetivo, o estudante realiza uma determinada tarefa (atividade dirigida por um objetivo) proporcionando a possibilidade de prestar atenção nos efeitos da atividade realizada (efeito das atividades), este processo de observação dos efeitos na atividade o estudante cria registros mentais (registro da relação atividade-efeitos).

Assim para entender o desenvolvimento das estruturas mentais por parte dos estudantes, ou seja, estabelecer explicitamente as relações entre as características da HLT de estudantes e características de sequências de ensino (identificar os objetivos de aprendizagem, definir fluxos de trabalho e contribuir para uma avaliação detalhada dos entendimentos de matemática do estudante), Simon e Tzur (2004) identificaram três tipos de tarefas com potencial para auxiliar os alunos na construção de um novo conceito para a compreensão, na perspectiva da reflexão sobre a relação atividade-efeito.

✓ **Tarefas iniciais:** pode ser realizada por estudantes que usam seu conhecimento prévio.

✓ **Tarefas reflexão:** o objetivo é que os alunos reflitam sobre esse relacionamento para gerar abstração de regularidades na relação atividade-efeito.

✓ **As tarefas de antecipação:** Para realizar é necessário que se tenha produzido a abstração e regularidade na relação atividade-efeito.

As tarefas iniciais são usadas para a criação e o reconhecimento de certas experiências; as tarefas reflexivas são para direcionar a atenção dos alunos para a relação atividade-efeito e as tarefas de antecipação têm o intuito de levar os estudantes a identificar e analisar regularidades. O conceito é considerado como uma relação dinâmica mental entre uma atividade e seus efeitos. Segundo Simon e Tzur (2004), as metas de aprendizagem que os alunos podem alcançar estão relacionadas com suas concepções correntes e com as tarefas que lhes são disponibilizadas.

Assim sendo, para o professor, entra em cena o mecanismo de reflexão sobre a relação atividade-efeito quando consideramos sua necessidade de selecionar, entre as atividades disponíveis, tarefas que possam impulsionar o processo de aprendizagem dos alunos.

Considerando a problemática de investigação inicialmente descrita, os objetivos e a perspectiva teórica adotada, a pergunta de investigação proposta foi: Que papel desempenha o Software em apoiar a fase de participação, no conhecimento do significado de funções trigonométricas?

Participantes e desenho do experimento de ensino

Esta investigação se desenvolveu em um processo de formação inicial e aborda informações sobre um experimento de ensino de funções trigonométricas usando o *Software GeoGebra*, cujo objetivo foi compreender a integração da Prática como Componente Curricular (PCC) na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul-UEMS, no Curso de Licenciatura em Matemática da Unidade Universitária de Nova Andradina.

Dezesseis acadêmicos de uma turma ingressante na Universidade participaram do experimento de ensino onde se trabalhou o conteúdo de funções trigonométricas. O experimento teve duração de 12 seções de 50 minutos divididos em quatro módulos, sendo que os módulos I e III com duas seções cada e os módulos II e IV com quatro sessões cada.

O contexto foi um experimento de ensino organizado considerando uma trajetória hipotética de aprendizagem (HLT) no conceito de funções trigonométricas. O experimento foi desenhado usando tarefas envolvendo recursos tecnológicos e considerando a concepção de uso da informática no ensino de matemática na formação de Professores integrado à prática pedagógica (Lobo da Costa, 2004). As tarefas destes módulos se articularam a partir dos seguintes pontos:

- Conceito de funções trigonométricas e sua relação com o ciclo trigonométrico;
- Exploração e conjecturas na validação entre o argumento de função trigonométrica e sua definição com o uso da tecnologia;
- Exploração gráfica com o *Software* das propriedades.

O módulo I teve como objetivo definir e conceituar funções trigonométricas, sua notação algébrica, a construção gráfica da função seno e reconhecimento da curva senoidal (e possível ressignificação). No laboratório de informática, os estudantes utilizaram o *Software GeoGebra* para explorar as características de uma função trigonométrica (módulo II), formulação de conjecturas, validação de respostas e desenvolvimento do significado de argumento de funções trigonométricas com o *software* (módulo III), e módulo IV, por tarefas, como os estudantes consolidam os conceitos trigonométricos explorando a amplitude, o deslocamento vertical o domínio e período dado a partir do *Software GeoGebra*.

No módulo IV o objetivo foi identificar nas respostas dos acadêmicos a compreensão do argumento de uma função trigonométrica na fase de apropriação em uma HLT. Para isto, os acadêmicos receberam 12 funções trigonométricas com 4 tarefas relacionadas ao seno, cosseno e tangente e optamos pelos mesmos arcos para as funções com o objetivo de o estudante observar as regularidades nesta atividade e refletir sobre a HLT.

- Função seno: $f(x)=\sin x$; $g(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})$; $h(x)=\sin(3.x)$; $k(x)=-2.\sin x$.

- Função cosseno: $f(x)=\cos x$; $g(x); \cos(x+\frac{\pi}{2})$; $h(x)=\cos(3.x)$; $k(x)=-2.\cos x$.
- Função tangente: $f(x)=\operatorname{tg} x$; $g(x)=\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{2})$; $h(x)=\operatorname{tg}(3.x)$; $k(x)=-2.\operatorname{tg}$.

Tarefa 1: Construção de gráficos das funções utilizando o GeoGebra e, a partir de suas observações, responder seu domínio, imagem, amplitude e período.

OBS: Para melhor encaminhamento da atividade, construa a função f e outra (por exemplo, a função g) na mesma tela, observe e faça suas considerações; siga assim, sempre a função f e uma das outras. Para cada uma dessas funções apresente o domínio, o conjunto imagem, a amplitude e o período.

Tarefa 2: Observando a tarefa 1 é possível detectar que dentre as funções temos caso(s) de mudança(s) no conjunto imagem, na amplitude e/ou no período em relação à função $f(x)=\sin x$.

Tarefa 3: Faça o mesmo para as funções cosseno e tangente em seguida faça observações sobre as mudanças de comportamento nos gráficos das funções, destacando as mudanças das leis dessas funções em relação à lei da função f .

Tarefa 4: Considerando as observações feitas no item 1 e a função $f(x)=\sin x$, apresente a lei da função M sabendo que seu gráfico da função é uma curva que está deslocada verticalmente 3 unidades para cima em relação ao gráfico da função f , possui domínio \mathfrak{R} , amplitude 1 e período 2π .

As tarefas acima teve o objetivo de introduzir a generalização do conceito de funções trigonométricas estabelecendo relações entre a função dada e seu argumento; por último, neste módulo, as tarefas tiveram como objetivo apoiar os acadêmicos na translação desde a fase de participação nos módulos anteriores até a fase de antecipação na construção do conceito de funções trigonométricas representado na tarefa 4.

Na tabela 1 descrevemos os objetivos observados em cada tarefa nas atividades elaboradas para o desenvolvimento da HLT.

Tabela1

Objetivo pretendido em cada tarefa.

	Exemplo	Objetivo
Tarefa 1: Definição de Funções	$f(x)=\sin x$: esboçar os gráficos na mesma tela do GeoGebra.	Analisar como os acadêmicos relacionam o domínio e imagem da função trigonométrica.
Tarefa 2 e tarefa 3: Refletir sobre a tarefa gerando regularidade na abstração	Explicitar a Função F, G, H, K, e L para seno, cosseno e tangente associando à representações gráficas, caracterizá-las.	Analisar como os estudantes são capazes de observar o comportamento das funções e relacionar o domínio recorrendo a uma função formal.
Tarefa 4: A partir da regularidade nas tarefas anteriores explicitar a Função M.	Definir e conceituar a função M, explicitá-la no comando do <i>Software</i> GeoGebra.	Analisar se os acadêmicos são capazes de observar a relação da variável com relação à amplitude, período e deslocamento vertical no gráfico. Analisar como os acadêmicos são capazes de coordenar diferentes informações e para esboçar o gráfico

de uma função trigonométrica.

Os acadêmicos realizaram as tarefas individualmente no laboratório de informática com todo o material utilizado no experimento de HLT. Para recolher as interações durante a resolução das tarefas no módulo 4 e nos demais módulos, usamos gravações de áudio e vídeo, gravando tanto as discussões durante o experimento como captação de imagens das telas e anotações realizadas por parte dos acadêmicos.

As tarefas definidas para esta atividade trataram de estabelecer como os acadêmicos empregam o uso dos conceitos envolvidos na função trigonométrica ao responderem corretamente a atividade 4 onde se pede para construir uma função apenas evidenciando o período, a amplitude e seu deslocamento no eixo da ordenada(y).

Coleta de Dados

Os dados desta investigação foram as transcrições das gravações orais e das telas dos computadores de cada um dos acadêmicos que foram codificados com as iniciais Ac seguido da numeração de 1 a 16. Na resolução da tarefa 1 os acadêmicos não encontraram dificuldades já que tinham vindo de uma sequência de atividades com o GeoGebra; também na resolução da tarefa 2 não apresentaram problemas, todos os acadêmicos afirmaram sim para a questão e explicitaram corretamente suas observações sobre as mudanças ocorridas na função, pois todos tinham anotações dos comportamentos fornecido a eles nos módulos I e II quando definimos e conceituamos funções trigonométricas; dessa forma, a visualização ficou mais fácil, segundo eles. Na tarefa 3 logo observaram a regularidade e resolveram facilmente; cabe observar o registro da fala de um dos acadêmicos, “*com este software ficou mais fácil, a gente digita a função aqui* < se referindo ao comando > *e já sai pronto né, ai é só copiar e anotar os pontos aqui olha*” < se referindo a anotação no caderno >.

Na resolução da tarefa 4 algumas dificuldades surgiram, principalmente por que mudou a forma de abordar a função. Ativamos a função “janela algébrica” no GeoGebra para registrar as “tentativas e movimentos” dos acadêmicos nesta atividade pois, como estavam trabalhando com o *software*, já prevíamos esta ação por parte do acadêmico. Ressalta-se que os mesmos estavam com os materiais didáticos e seus respectivos cadernos para anotações utilizados durante as seções. Contudo dos dezesseis acadêmicos quatro foram obter êxito na atividade em mais de 5 tentativas registradas na janela algébrica.

Análise dos dados

Na análise das respostas dos acadêmicos identificamos os conceitos e ideias utilizados nas tarefas no decorrer da HLT:

Nos módulos I e II: os acadêmicos utilizaram seus conhecimentos prévios oriundos da educação básica para ressignificação de seus conceitos sobre o conteúdo abordado. Neste, o objetivo foi identificar e evidenciar as relações entre a atividade-efeito em contexto de funções trigonométricas e sua relação com o ciclo trigonométrico. Assim, evidenciamos diferentes manifestações de como os acadêmicos coordenam as informações em diferentes situações e como, por vezes, eles mudaram o foco de atenção. Identificamos que os acadêmicos se encontravam na fase participativa nas tarefas iniciais, faziam usos de conhecimentos prévios de estudos na educação básica construindo um conjunto de registros, convertendo em uma reflexão e abstração de regularidade na relação atividade-efeito.

No módulo III: Nesta etapa se tratou de caracterizar a fase de participação dos acadêmicos objetivando uma reflexão sobre as tarefas propostas neste módulo generalizando a abstração de regularidades na relação atividade-efeito ficando evidente nas transcrições realizadas e verbalizadas por parte do acadêmico. Neste módulo foi possível ampliar e complementar caracterizações anteriores do processo de coordenação de informações que apoiou o processo de abstração.

No módulo IV: Com o objetivo de levar o acadêmico a fazer o uso do processo de antecipação onde, a partir de dados sobre o comportamento de uma função trigonométrica, o acadêmico possa generalizar a partir de uma abstração de regularidades na relação atividade-efeito.

Resultados

Os resultados mostram que os acadêmicos responderam majoritariamente usando o processo de construção cognitiva que se refere ao estágio participativo caracterizado por ações cognitivas como classificação dos registros da atividade-efeito ou elementos que combinam estruturas mentais para atingir um determinado objetivo e a coordenação de informações por meio de uma comparação, ou argumentos para gerar uma nova estrutura. Nessa perspectiva, o processo de consolidação de conceitos matemáticos é outra manifestação de abstração reflexiva, que leva a um novo estado cognitivo.

Neste novo estado cognitivo do aluno foi capaz de reconhecer a estrutura matemática na definição de funções trigonométricas (objeto, propriedade, relação, etc (figura 2)) como antecipação na situação, o que mostra certa semelhança com alguma situação de experiência anterior (estudos oriundos da educação básica e módulos iniciais) permitindo seu uso do estágio antecipatório. Este processo cognitivo repetido em situações diferentes leva à possibilidade de consolidação de concepções matemáticas. (ROIG, LLINARES & PENALVA, 2012).

Como exemplo, nesta anotação do acadêmico Ac15, as propriedades, antes de plotar no GeoGebra, destacou-se na anotação o conjunto imagem, informação não fornecida no enunciado.

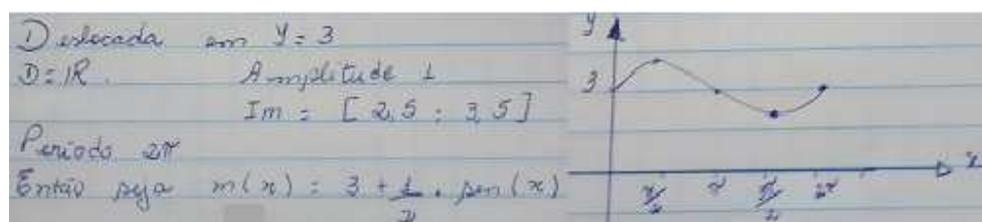


Figura 2. Esboço do acadêmico Ac15, das informações do enunciado da tarefa 4.

Nos protocolos de respostas as telas dos acadêmicos Ac2, Ac7, Ac9 e Ac15, caracterizaram e evidenciaram a construção do significado do argumento de funções trigonométricas e o desempenho do *software* na HLT; também desconsideramos nas respostas como parâmetro à função seno, pois todos os acadêmicos construíram no GeoGebra esta função; assim, não consideramos na análise esta como uma das tentativas de solução da tarefa 4.

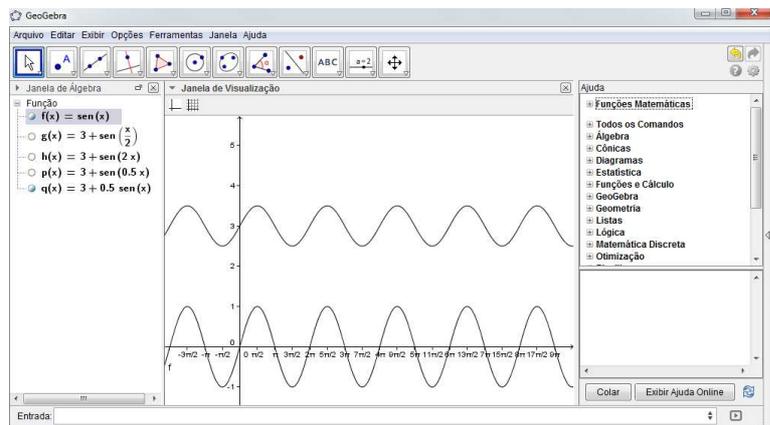


Figura 3. Resposta do acadêmico Ac2 para obter a Função M.

Na figura 3, observando a janela algébrica, notamos que os acadêmicos obtiveram sucesso da questão na quarta tentativa e ativou a janela “ajuda” para esboçar a função seno; verificamos que outros três acadêmicos dos 16 analisados também realizaram o mesmo número de tentativas e dois deles com a janela ”ajuda” ativados.

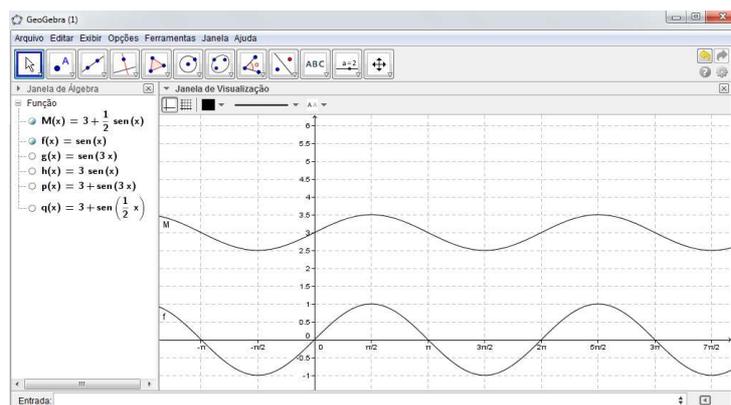


Figura 4. Resposta do acadêmico Ac7 para obter a Função M.

Na figura 4, observa-se na janela algébrica que o acadêmico realizou cinco tentativas, e dois outros acadêmicos também usaram a mesma quantidade de tentativas.

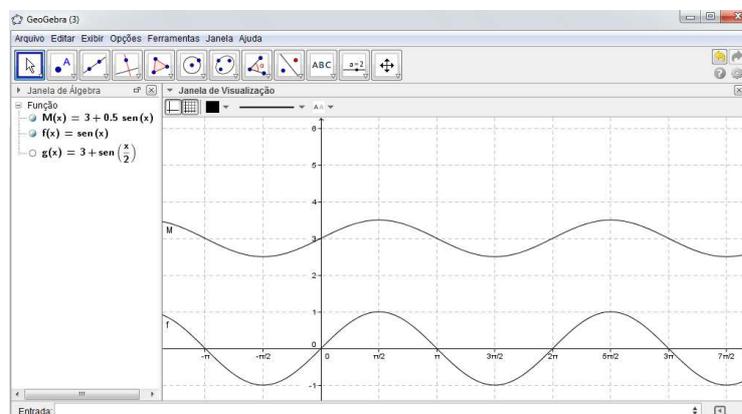


Figura 5. Resposta do acadêmico Ac9 para obter a Função M.

Na figura 5, observa-se na janela algébrica que o acadêmico acertou a questão em duas vezes e mais três acadêmicos também obtiveram o mesmo êxito.

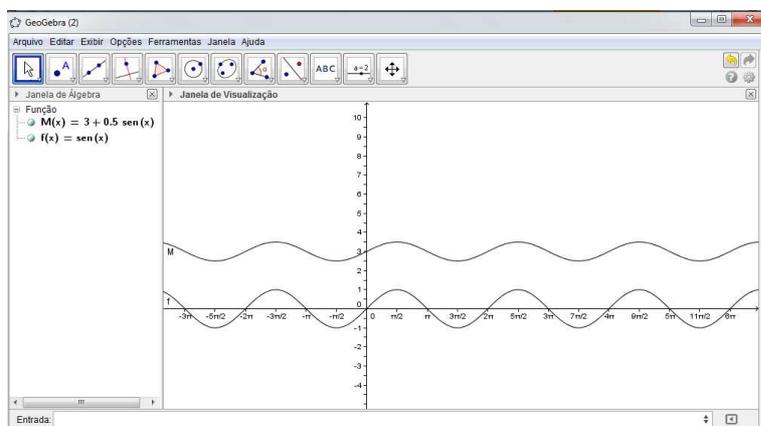


Figura 6. Resposta do acadêmico Ac15 para obter a Função M.

Na figura 6, observamos na janela algébrica que o acadêmico obteve êxito na primeira digitação no *software*.

No experimento, evidenciamos que o contexto tecnológico desenhado, onde se integram diferentes tipos de representações inter-relacionadas, ajudam na evolução da construção do conceito de funções trigonométricas.

A sua interação e dinamismo nas ações com relação a buscar e estender facilitaram aos acadêmicos o entendimento das informações e registros nas relações entre a atividade-efeito na HLT com o *Software GeoGebra* como, por exemplo, na tarefa 4, cinco dos dezesseis acadêmicos compreenderam o comportamento da Função M , e todos realizaram os esboços do gráfico no *Software*, definiram o seu comportamento de forma algébrica sem dificuldade em consequência das funções propostas anteriormente nas tarefas dois e três

Em particular, ressaltamos a ênfase na possibilidade de introduzir assistentes digitais no desenvolvimento de sequências de ensino que tangem as características de um processo de construção dos significados por parte dos estudantes (Lobo Da Costa, 2004).

Concordamos com Coll e Solé (2009) quando afirmam que as intervenções do professor são também responsáveis pelo resultado, ficando para uma posterior análise deste experimento os fatores na sequência de ensino que parecem influenciar no processo de construção do conceito de funções trigonométricas na HLT deste experimento. Neste sentido, nos momentos em que os módulos foram se desenvolvendo com a abordagem construtivista, observamos uma maior autonomia dos acadêmicos, pois quando a quantidade de auxílio é excessiva ou o professor não orientava adequadamente condicionava o acadêmico a aguardar resposta, ou seja, acadêmico sem autonomia.

Neste sentido, Simon *et al* (2004), enfatizam que apenas com o conhecimento matemático não é possível interpretar a linguagem, as dúvidas, as conjecturas e as ações dos alunos. O professor deve conhecer os objetivos de aprendizagem que espera alcançar para que possa modificar a HLT quando perceber que os alunos se distanciaram de suas metas ou quando uma determinada atividade não for adequada aos seus acadêmicos.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES que, por meio de bolsa do Programa PSDE (Proc. nº 0956-14-7), subsidiou parte dos estudos de doutoramento e desta pesquisa.

Referências Bibliográficas

- Almeida, M. E. B. (2000). *O Computador na Escola: Contextualizando a Formação de Professores Para a Mudança* (Tese de Doutorado em Educação: Currículo). 257f. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Barbosa, S. M. (2009). *Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia* (Tese de doutorado). 199 f. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP.
- Borba, M. C., & Penteadó, M. G. (2007). *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. *New York: Springer*.
- Briguenti, M. J. L. (1998). *Alterando o ensino da trigonometria em escolas públicas de nível médio, a representação de algumas professoras* (Tese de Doutorado em Educação). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Marília.
- Brito, A. J., & Morey, B. B. (2004). Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. *Horizontes*, 22(1), 65-70, jan./jun. Bragança Paulista.
- Coll, C., & Solé, I. (2009). Os professores e a concepção construtivista. In *O construtivismo na sala de aula*. (Trad. Claudia Schilling). São Paulo: Ática.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana and .Villani (eds.) *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (37-51). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.
- Lindegger, L. R. M. (2000). *Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo, uma proposta a partir da manipulação de modelos* (Dissertação mestrado em Educação Matemática). PUC/São Paulo.
- Lobo da Costa, N. M. (2004). *Formação de Professores para o ensino da Matemática com a informática Integrada à prática Pedagógica: exploração e análise de dados em bancos computacionais* (Tese de Doutorado em Educação). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.
- Mira, M.; Valls, J.; Llinares, S. (2013). Un experimento de enseñanza sobre el limite de una función. Factores determinantes en una trayectoria de aprendizaje. *UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, nº 36, 89-107.
- Piaget, J. (1977). *Studies in Reflecting Abstraction*. Sussex: Psychology Press.
- Piaget, J. (2001). *Studies in reflecting abstraction*. Sussex, England: Psychology Press.
- Piaget, J., García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo XXI editores. México.
- Roig, A., Llinares, S., & Penalva, M. C. (2012). Different Moments in the Participatory Stage of the Secondary Students' Abstraction Mathematical Conceptions. *Bolema*, 26(44), 1345-1366, dez. Rio Claro (SP)
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.

- Simon, M. A., & Tzur R. (2004). *Explicating the Role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory*. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., & Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 305-329.
- Steffe. L. & Gale. J. (Eds.) (1995). *Constructivism in education*. Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum.
- Tzur, R. (1999). An Integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 390-416.
- Valente, J. A. (2001). Criando oportunidades de aprendizagem continuada ao longo da vida. *PÁTIO – Revista Pedagógica*, IV(15), nov.2000 – jan. 01. Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul.
- von Glasersfeld. E. (1991). *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Zulatto, R. B. A.(2007). *A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de professores* (Tese de doutorado). 173 f. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP.