Determinaciones mutuas entre certeza, duda y comprensión

Benjamín **Martínez** Navarro
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
benjaminmartinezn@gmail.com
Mirela **Rigo** Lemini
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
mrigolemini@gmail.com

Resumen

La investigación cuyos resultados parciales aquí se exponen se centra en el análisis interpretativo de estados internos (como la certeza, la presunción o la duda) en torno a hechos de las matemáticas que vivencian asesores en formación que participan en un foro virtual; específicamente se examinan posibles determinaciones mutuas que se dan entre esos estados y la construcción de conocimientos. Para el análisis que se expone en este documento se elaboró un marco interpretativo sobre la comprensión.

Palabras clave: certeza, duda, comprensión, sustentos, foro virtual.

Antecedentes

La investigación cuyos resultados parciales aquí se exponen se centra en el análisis de estados internos como el convencimiento, la convicción, la certeza, la presunción o la duda en torno a hechos de las matemáticas (los que se representan a través de afirmaciones de contenido matemático) que vivencian agentes de clase, específicamente, estudiantes-asesores (i. e., asesores en formación) que participan en un foro virtual. En otros reportes (Martínez & Rigo, 2013; Martínez & Rigo, 2014[a]; Martínez & Rigo, 2014[b]) se han analizado las relaciones entre la comprensión y esos estados internos, que aquí se les denominan 'estados epistémicos'. Específicamente en Martínez & Rigo (2013) se mostró el caso de una estudiante-asesora que acompañaba y retro-alimentaba su certeza en los hechos de las matemáticas con su comprensión conceptual. En este documento se expone cómo la estudiante-asesora modificó sus estados internos conforme modificó su comprensión.

Investigaciones sobre los estados epistémicos –sostienen Martínez & Rigo (2014[b]) - se han orientado hacia el ámbito del profesional de las matemáticas como al de su instrucción. Para el matemático, el convencimiento y la certeza son motores que impulsan su actividad en las etapas de desarrollo heurístico, y una guía para certificar sus resultados durante los procesos de prueba (Tymoczko, 1986). La comunidad de educación matemática ha realizado diversos estudios que implícitamente parten del supuesto de que, a semejanza de lo que sucede con los matemáticos, la certeza también importa en la construcción del conocimiento matemático en el aula. Algunos de esos trabajos se han recreado en ambientes extra-clase y se han focalizado ya sea en los estudiantes (e. g., el de Balacheff, 2000) o bien en los profesores (e.g., el de Harel & Sowder, 2007); otros, desarrollados en ambientes intervenidos de clase, se han centralizado básicamente en alumnos (e. g., el de Krummheuer, 1995). A diferencia de esos estudios, en el presente se analizan algunas posibles mutuas determinaciones que se dan entre esos estados epistémicos y la construcción de conocimientos en el contexto de un foro virtual.

Marco interpretativo

Los esquemas epistémicos

Los alumnos suelen sustentar sus afirmaciones o procedimientos de contenido matemático de modos diversos. Rigo (2013) ha propuesto una clasificación de estos recursos de sustentación a los que llama “esquemas epistémicos”; ella sugiere que algunos de esos esquemas se organizan y orientan en torno a razones matemáticas, como los que poseen una estructura lógica de tipo deductivo (e. g., ejemplos genéricos o las instanciaciones, v. Balacheff, 2000), o los que surgen a partir de la acumulación de evidencia empírica (e. g., a partir del análisis de casos particulares). En otros casos -continúa Rigo (2013)-, los esquemas que una persona construye para sustentar la verdad de un enunciado matemático responden a consideraciones extra-matemáticas haciéndose a un lado el contenido disciplinar del enunciado, como por ejemplo, cuando un estudiante explica el uso de un algoritmo recurriendo a su facilidad (“es más fácil resolverlo así”), o a la autoridad del profesor (“porque me lo dijo la maestra”), en cuyo caso se está soportando la verdad de las aseveraciones en esquemas epistémicos basados en razones prácticas y en la autoridad, respectivamente. Otro tipo de esquemas basados en consideraciones extra-matemáticas son los que se basan en la familiaridad, mismos que son resultado de la repetición, la memorización y las costumbres. Los esquemas que se basan en la repetición pueden provenir de reiterar sistemáticamente algún enunciado o hecho de las matemáticas, mientras que otros esquemas pueden proceder de costumbres institucionales en torno a lo que deben ser las tareas matemáticas que deben resolver los niños en la clase, como cuando los estudiantes sustentan la validez de un algoritmo por ser habitual o por su facilidad.

Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza, presunción o duda.

En la investigación se considera, siguiendo lo expuesto en Martínez & Rigo (2014[b]), que, asociadas a sus aseveraciones de contenido matemático, los sujetos pueden experimentar estados internos de certeza (cuando le asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción o duda (cuando le asocian grados menores de probabilidad a lo creído). A estos estados Rigo (2013) les llama “estados epistémicos”, como se dijo. Para fijar ideas, en la investigación nos hemos constreñido sólo a los estados epistémicos aludidos (certeza y duda, dejando fuera el convencimiento, la convicción o la persuasión, entre muchos otros).

En el diseño del instrumento teórico-metodológico que se propone a continuación (v. Martínez & Rigo, 2013) convergieron perspectivas provenientes de distintas disciplinas: de la filosofía (Wittgenstein), la psicología (Bloom, Hastings & Madaus), la sociología (Abelson) y la educación matemática (Rigo, 2011). Particularmente relevante para el estudio resultó la aportación de trabajos lingüísticos como los de Hyland (1998), que permitieron recurrir al análisis del meta-discurso de los participantes en el foro virtual, con el fin de desvelar las intenciones comunicativas (muchas inconscientes) que ellos proyectan a través de su escritura.

En esta investigación se considera que una persona (que participa en un foro virtual) vivencia un grado de certeza, o bien de presunción o duda, en un enunciado matemático, cuando cumple con alguno(s) de los criterios que aparecen en la Tabla 1. Estos criterios son suficientes pero no necesarios.

Tabla 1

Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza y presunción o duda

Elementos del habla	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e. g., tengo).
Acción	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
Familiaridad	La persona recurre a esquemas epistémicos basados en la familiaridad (resultado de la repetición, la memorización y las costumbres).
Determinación	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia, a pesar de tener al colectivo en su contra. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición.
Interés	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son:
	-*Sistemáticas*. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible.
	-*Informativas*. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos (no necesariamente correctos).
Consistencia	La persona muestra consistencia en sus distintas intervenciones.

Indicadores de comprensión

En ese documento y siguiendo a Schoenfeld (2011), se establece una diferencia entre el conocimiento procedimental "basado en cómo hacer las cosas", y el conocimiento conceptual "asentado en los racionales (*rationales*) intelectuales a través de los cuales se explica cómo las cosas funcionan juntas, y porqué así sucede" (2011, p. 26). De lo anterior y de otras consideraciones (provenientes de Rigo, 2013; Duval, 2009; Salcedo, 2007) se desprendieron algunos indicadores para caracterizar la comprensión conceptual en general y la comprensión procedimental (aplicada a la variable y al signo igual), que se describen en lo que sigue.

Sobre la comprensión conceptual

En el presente documento fue necesario incluir, dentro de los criterios sobre comprensión conceptual elaborados en trabajos previos (Martínez & Rigo, 2014[b]) aspectos relacionados con la teoría de la cognición implícita, conforme a la cual la construcción del conocimiento (en particular del conceptual) está basada en procesos de explicitación de representaciones implícitas. Los fenómenos de cognición implícita, que subsisten inconscientemente, se caracterizan porque el individuo dispone de representaciones activas de las que él no puede informar, o sólo lo puede hacer parcialmente, aunque esas representaciones estén influyendo en su conducta (Dienes y Perner, 1999). Estas consideraciones aparecen en la Tabla 2 bajo el rubro de 'Explicitación' y de 'Transferencia'.

Tabla 2

Indicadores de comprensión conceptual (aplica a todo concepto matemático)

CC.1. Esquemas epistémicos basados en razones matemáticas	El nivel de comprensión conceptual está relacionado con el tipo de esquema epistémico que se pone en juego: a comprensiones más profundas le corresponden esquemas epistémicos basados en razones matemáticas más generales (e. g. esquemas de tipo deductivo apoyado en axiomáticas abstractas) y a comprensiones de menor penetración le atañen esquemas de menor generalidad (como las instanciaciones o el análisis de casos particulares). Estos esquemas deben de converger o ser consistentes con los esquemas epistémicos de la matemática disciplinar o la matemática escolar.
CC.2. Explicitación de representaciones implícitas	La persona da muestras de haberse percatado de representaciones implícitas pero que estaban presentes en su conducta.
CC.3. Transferencia	La persona interpreta adecuadamente un concepto en diferentes contextos.
CC.4.Interpretación acorde a la acepción matemática aceptada	La persona confiere a las representaciones simbólicas y a los conceptos matemáticos interpretaciones que son acordes con la acepción matemática aceptada (de la disciplinar y/o escolar).
CC.5.Claridad y precisión	La persona explica sus puntos de vista con claridad y precisión (y preferentemente se apega a los puntos de vista disciplinares avalados intersubjetivamente).
CC.6.Conocimiento promedio	La persona tiene más conocimiento que lo que posee el promedio.

Se dice que una persona tiene bajos niveles de comprensión conceptual si activa esquemas epistémicos extra-matemáticos y/o no cumple con la mayoría de los criterios anteriores. En relación al signo del signo igual, se dice que una persona tiene incomprensión conceptual si lo interpreta como indicador, separador y como operador (ver apartado siguiente sobre signo igual), incumpliendo así el criterio CC.4.

Sobre la variable y la comprensión procedimental

En el Modelo 3UV se distinguen distintos aspectos de la variable como incógnita (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005). Algunos de ellos se describen en la Tabla 3.

Tabla 3

Aspectos de la variable como incógnita del modelo 3UV. Indicadores de comprensión procedimental.

La variable como incógnita	
I1	Reconocer e identificar la presencia de algo desconocido que puede ser determinado.
I5	Simbolizar las cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones.
I2	Interpretar la variable que aparece en una ecuación como un valor específico.

I4	Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas.
I3	Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

En este escrito se considera que un estudiante tiene una **comprensión procedimental** cuando en sus producciones cumplen con los criterios de la Tabla 3 y llegan a resultados correctos.

Sobre el signo igual y la comprensión procedimental

En el ámbito de las matemáticas, Bouvier y George (2000) definen a la igualdad como una relación binaria que asocia símbolos que representan un mismo objeto matemático. Dentro del álgebra escolar, Godino y Font (2003) entienden a la igualdad asociada a expresiones que contienen el signo igual y que indican dos maneras de designar o escribir un mismo objeto matemático. Estos autores distinguen tres tipos de igualdades. El primer tipo (identidad) se refiere al caso en el que la igualdad es verdadera para cualquier valor que tomen las variables. El segundo tipo (ecuación o *equivalencia condicional*) se refiere al caso en el que la igualdad incluye variables pero solo es cierta para determinados valores; a ésta la denominan ecuación. Finalmente, el tercer tipo (las fórmulas) son aquellas que expresan una relación de dependencia entre dos o más variables. Estas interpretaciones del signo igual coinciden con los distintos usos de la variable que distingue el Modelo 3UV (Ursini 2005) que en este documento se ha adoptado como parte del marco para distinguir la comprensión en torno al concepto de variable. En el caso en el que las producciones de los estudiantes coincidan con estas interpretaciones del signo igual y lleguen a resultados correctos, en el marco de este escrito se dice que ellos poseen una **comprensión procedimental** del signo igual.

Por otra parte, los estudiantes confieren distintas interpretaciones al signo igual, algunas de las cuales resultan ser matemáticamente incorrectas o imprecisas. Molina (2006) categorizó estos usos del signo igual. Entre ellos se encuentra el signo igual como *operador*, interpretación en el que dicho signo es usado en sentencias unidireccionales compuestas por una cadena de operaciones dispuestas a su izquierda y un resultado a su derecha (e.g. 12+3=15+21=36-9=25). Otro uso es el signo igual como *separador*, mediante el cual se utiliza como separador de los pasos realizados en la resolución de una actividad (e. g. X+5=10+5 = 15=15).Un uso más al que hace referencia la autora es el de indicador de cierta *conexión o correspondencia*, interpretación imprecisa del signo igual con base en el cual se hace referencia a objetos no matemáticos o de distinta naturaleza (e. g. estuche=3).

Consideraciones relacionadas con el método

La investigación cualitativa que aquí se presenta está centrada en un estudio de caso de tipo interpretativo (Denzin & Lincoln, 1994). El estudio empírico se llevó a cabo en el Diplomado de Temas Fundamentales de Álgebra impartido por el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (México); el diplomado tiene el propósito de fortalecer la formación de personas que asesoran en temas de álgebra a adultos que se encuentran en proceso de obtener su certificado de secundaria (estudiantes-asesores). El diplomado está compuesto por cuatro Módulos de contenido matemático y cada módulo está organizado por semanas que contienen, entre otras cosas, un foro virtual al que deben ingresar los estudiantes-asesores. Para este reporte se tomaron cuatro participaciones correspondientes al Módulo cuatro en el que se abordan aspectos de la variable como incógnita: la primera participación fue tomada de la semana uno en la que se busca conocer los conocimientos previos con los que cuentan los asesores para resolver situaciones que involucren incógnitas; la segunda y tercera participación fueron tomadas de la semana tres cuyo objetivo es profundizar en la resolución de ecuaciones; finalmente, la cuarta participación se tomó de la semana cuatro en la que se abordan situaciones problemáticas que pueden modelarse con sistemas de ecuaciones .Las participaciones elegidas fueron publicadas por una estudiante-asesora que llamaremos Jeymi y su elección obedece a que en esas participaciones la estudiante aborda aspectos de la variable como incógnita, hace uso del signo igual y ella parece experimentar distintos estados internos. Martínez fungió como tutor del grupo, quien deliberada y sistemáticamente instó a que sus estudiantes explicitaran los sustentos en los que apoyaban sus afirmaciones.

Análisis de resultados

En la semana uno del Módulo cuatro se les solicitó a los estudiantes resolver la siguiente situación problemática: Una pluma con estuche, cuesta $ 120.00. La pluma cuesta $48.00 más que el estuche. ¿Cuál es el precio de la pluma y del estuche? Se esperaba que los estudiantes resolvieran el problema utilizando estrategias propias que muy probablemente eran resultado, en parte, de su labor como asesores. En lo que sigue aparece la resolución textual de Jeymi.

Primera participación de Jeymi: Situación inicial

(1.1) hola hola, buenos días aquí está mi participación
(1.2) datos
precio total de la pluma con estuche = 120
incógnita = estuche = x
constante= pluma= x+ 48
(1.3) ecuación = estuche +pluma = 120 = x + (x + 48) = 120
(1.4) x+(x+48)=120; x+x+48=120; 2x=120-48; 2x=72; x=72/2; x=36
(1.5) ahora comprobemos sustituyendo valores
estuche=x = 36
pluma=x+48 = 36+48=84
ecuación= x+ (x+48)=)120 = 36+36+48 =120 = 120=120
(1.6) por lo tanto el estuche cuesta $36.00 y la pluma cuesta $84.00 y la suma de todo nos da un total de $120.00. Espero y este bien si no corríjanme saludos . . .

Comprensión procedimental e incomprensión conceptual. En su resolución, Jeymi mostró una comprensión procedimental del signo igual cuando ella planteó la ecuación que resuelve el problema (1.3) y aplicó las reglas correspondientes a la trasposición de términos para obtener correctamente el valor de la literal (en 1.4). En estos casos ella interpretó el signo igual como *equivalencia condicional* para obtener el valor de la literal. Asimismo, ella dejó ver su comprensión procedimental al poner en juego los aspectos de la variable como incógnita: en (1.2) ella identificó la incógnita del problema (como 'el estuche', aunque de su resolución se desprende que se refería a su precio) y le asignó una literal (x); en (1.3), la estudiante planteó correctamente la ecuación que resolvía el problema; en (1.4) obtuvo el valor de la incógnita usando la trasposición de términos y en (1.5) ella comprobó sus resultados.

Sin embargo, la estudiante asesora también mostró baja comprensión del signo igual lo que se aprecia por las interpretaciones imprecisas que le otorgó a dicho signo (contraponiéndose al criterio CC.4): en principio, porque lo interpretó como *indicador* de cierta correspondencia entre objetos de distinta naturaleza (e. g. en 1.2, en donde establece que incógnita=estuche=x; en 1.3, cuando relacionó la expresión ‘estuche+pluma’ y el número ‘120’, y en 1.5 cuando establece que ‘estuche=x’); adicionalmente, porque interpretó al signo igual como *separador* (e. g. en 1.3, entre la expresión ‘estuche+pluma=120’ y la ecuación x+(x+48)=120, y en 1.5 entre la operación 36+36+48=120 y la igualdad 120=120), finalmente, porque la estudiante asesora también significó al signo igual como *operador* (e. g., en 1.5, donde determinó que 36+36+48=120).Adicionalmente, Jeymi también mostró cierta incomprensión conceptual en relación a la variable (contraponiéndose otra vez a CC.4), porque no pudo identificar como incógnitas a las dos cantidades desconocidas involucradas en el problema, lo que dejó ver, de paso, un *conocimiento menor al promedio*, ya que sus compañeros no incurrieron en ese error.

Complementariamente, Jeymi dio otras muestras generales de incomprensión conceptual. De entrada, porque pareciera que los esquemas que guían su resolución de forma predominante son *de tipo extra-matemático*, en particular, los basados en la familiaridad resultado de la memorización (e. g., la memorización de los aspectos de la variable como incógnita que subyacen a su procedimiento). Además, porque la estudiante dejó sin *explicitar* los principios y sustentos en los que se podrían apoyar sus acciones y procedimientos y dejó con ello de *explicar su punto de vista*.

Altos niveles de presunción. Asociada a la comprensión procedimental que Jeymi mostró en torno al uso del signo igual y a la variable como incógnita, la estudiante parece haber experimentado altos niveles de presunción. Es plausible esta suposición por el uso de *enfatizadores* como el modo indicativo de los verbos en su resolución (e. g., “cuesta” o “da” en 1.6) y de que *actuó* en consecuencia con reglas que seguramente le eran *familiares* en su labor como asesora. Adicionalmente, mostró *determinación* para publicar su respuesta y cierto *interés* al resolver todas las preguntas que componían la actividad. Sin embargo, el *mitigador* “corríjanme” en 1.6 la distancia de un estado de certeza.

Segunda participación de Jeymi: Punto de inflexión en su comprensión y en sus estados internos

Una vez que los estudiantes-asesores mostraron sus propias estrategias para resolver situaciones que involucraban a la variable como incógnita, el tutor y los estudiantes reflexionaron en torno a la interpretación que ellos daban a cada uno de los elementos de la ecuación y en particular al signo igual. Para tal fin el tutor solicitó a los estudiantes que resolvieran ecuaciones en un interactivo en el que ellos debían usar las propiedades de la igualdad. La respuesta textual de Jeymi aparece en lo que sigue.

(2.1)

Lado izquierdo de la balanza(Primer miembro)	Signo igual (Equilibrio)	Lado derecho de la balanza (Segundo miembro)
2x-8	=	5x-2

(2.2) Para “dejar sola a la x” realizo lo siguiente:
1.-Sumo a ambos miembros. La ecuación nos queda:

Lado izquierdo de la balanza(Primer miembro)	Signo igual (Equilibrio)	Lado derecho de la balanza (Segundo miembro)
2x	=	5x

(2.3) 2.-Sumo a los dos miembros 2.La ecuación nos queda:

Lado izquierdo de la	Signo igual	Lado derecho de la balanza

balanza(Primer miembro)	(Equilibrio)	(Segundo miembro)
-6	=	3x

(2.4) 3.-Divido a los dos miembros entre 3.La ecuación nos queda:

Lado izquierdo de la balanza(Primer miembro)	Signo igual (Equilibrio)	Lado derecho de la balanza (Segundo miembro)
-2	=	x

Comprensión e Incomprensión. En este fragmento se identificaron dos tipos de fenómenos epistémicos. Por una parte, para el caso de las ecuaciones aritméticas (en donde la literal aparece sólo en uno de los lados de la ecuación. V. Rojano (2002)), la estudiante mostró comprensión procedimental y conceptual. En 2.3 la estudiante recuperó una ecuación equivalente a la inicial posiblemente como resultado de un proceso de transposición que ella hiciera en lápiz y papel (de otra manera no se podría explicar de dónde surge dicha ecuación), mostrando (ahí y en 2.4) una comprensión procedimental al interpretar el signo igual como *equivalencia condicional* para obtener el valor de la literal. Asimismo mostró cierta comprensión conceptual cuando enunció con *precisión* la propiedad de la igualdad que ella usó en congruencia con los *procedimientos matemáticos aceptados*. Esta comprensión no la mostró en el caso de situaciones más complejas, como las ecuaciones algebraicas (en las que la literal aparece en ambos lados de la ecuación. V. Rojano (2002)). En este segundo caso, la estudiante expresó incomprensión en el manejo del signo igual, la que se manifiesta por la *imprecisión* al enunciar la regla aplicada (e.g. en 2.2 al no explicitar la cantidad sumada; y en 2.3; *CC.5*), y del hecho de que las ecuaciones 2.1 y 2.2 no son equivalentes, *contraviniendo los procedimientos convencionales de la matemática (CC.4).*En este caso, ella también dejó ver cierta incomprensión procedimental y conceptual del uso de la variable como incógnita. Su incomprensión procedimental se puede deducir del hecho de que la estudiante sólo puso en juego el aspecto I2 de la variable al encaminar sus acciones a obtener el valor de la literal y no comprobó su resultado (I5) como lo hiciera en (1.5), aunque ella obtuvo el valor correcto de la literal. Su incomprensión conceptual la dejó ver cuando enunció reglas *ambiguas e imprecisas* (e. g en 2.2 y 2.3) y del hecho de que no siguió los *procedimientos aceptados* o convencionales para calcular el valor de la incógnita.

Bajos niveles de presunción. En su segunda participación Jeymi experimentó bajos niveles de presunción, que se pueden apreciar a partir de la relativa *incongruencia entre las reglas que enuncia y sus acciones* (e. g. en 2.3 advirtió que aumentó dos, lo que no se reflejó en la ecuación); que se perciben también considerando su *interés* en publicar su respuesta y el uso del modo indicativo de los verbos como *enfatizadores*. La familiaridad que Jeymi mostró con las reglas que usó en su primera participación parece diferenciar los altos niveles de presunción que ahí expresó, de los bajos niveles de presunción que exhibió en esta segunda, en el que parece que las reglas le son *ajenas*.

Tercera participación de Jeymi: Reconstrucción de la comprensión y de sus estados internos.

Como respuesta a la participación de Jeymi uno de sus compañeros le solicitó que volviera a explicar sus procedimientos al hacerle ver que no eran claros, lo que motivó que la estudiante publicara su siguiente participación (se retoma la publicación textual):

(4.1) Hola, hola creo que me confundí pero aquí les dejo paso a paso mi respuesta corregida

(4.2) 2x - 8 = 5x - 2

(4.3) primero hay que sumar ambos términos, hay que pasar el -8 al término de la derecha y para pasarlo se suma +8 en ambos miembros y se suman ambos miembros
(4.4) y nos quedaría así 2x= 5x +6
(4.6) ahora hay que poner las x en un sola lado y pasamos al 5x al lado de la izquierda y para hacerlo tenemos que cambiarlo con signo cambiando
(4.7) y nos quedaría así -5x + 2x = 6
(4.8) Y si sumamos los términos
(4.9) quedaría así -3x = 6
(4.10) ahora para dejar sola a x tenemos que dividir ambos términos entre -3
(4.11) y nos quedaría así -3x/-3 = 6/-3
(4.12) y nos quedaría x= -2
(4.14) espero y esté bien Saludos…

Aumento en los niveles de comprensión. Tomando como referencia la segunda participación, destaca en la tercera intervención de Jeymi un aumento en los niveles de comprensión conceptual en torno al signo igual, ya que en esta oportunidad le dio un significado acorde con lo matemático (CC.4). En principio, porque ella aplicó adecuadamente las propiedades de la igualdad (la de sumar o dividir ambos términos la misma cantidad) en ecuaciones aritméticas (4.11) que quizás como resultado de un proceso de *transferencia* (CC.3) en esta tercera intervención aplicó también a ciertas ecuaciones algebraicas (en 4.4). Seguidamente, porque ya hay consistencia en su discurso algebraico ya que la ecuación 4.2 es equivalente a la 4.4 y ésta lo es a la 4.9. En tercer lugar, porque en esta intervención se dieron procesos de *explicitación* (CC.5) que no están presentes en su segunda participación: de entrada, porque para la obtención de dichas ecuaciones equivalentes en esta tercera ella reformuló (en 4.3, CC.2) las reglas que usó en 2.2 y en 2.3, apelando ahora a las propiedades de la igualdad que en esta nueva participación ya enunció con precisión y que usó en congruencia con los *procedimientos matemáticos aceptados* (en 4.4), y porque explicitó (en 4.6) la transposición que muy probablemente hizo en 2.3, la que enunció también con *precisión* y que usó en *congruencia con los procedimientos matemáticos aceptados*. En todos estos casos ella utilizó el signo igual de acuerdo a la acepción matemática en el sentido de designar un mismo objeto matemático, mostrando, además, un *conocimiento promedio* en torno al concepto. En cuanto al uso de la variable como incógnita Jeymi dejó ver un aumento en su comprensión procedimental cuando la estudiante puso en juego los aspectos I2 al encaminar sus acciones a la obtención del valor de la literal y el aspecto I4 sin violar las propiedades de la igualdad. Sin embargo, Jeymi no comprobó su resultado (I5) como lo hiciera en (1.5). Su incomprensión conceptual la dejó ver al dejar *implícitos* los aspectos de la variable como incógnita que subyacen su procedimiento.

Aumento en los niveles de presunción. En esta segunda participación Jeymi pareció experimentar un aumento en los niveles de presunción en torno a las reglas que enunció, con respecto a su segunda. Estos altos niveles se dejan ver por su uso de *enfatizadores* ("hay que" en (4.3) o "tenemos" en (4.10)) al enunciarlas, de que *actuó* en consecuencia de esas reglas (e. g. en 4.10 enunció que tenía que dividir ambos miembros de la ecuación entre tres, acción que ejecutó en 4.11), de que mostró *interés* en la resolución de la ecuación al contestar la actividad y precisar las reglas que utilizó, de que mostró *determinación* por corregir su respuesta ante sus compañeros y de que mostró *consistencia* en los criterios anteriores. Sin embargo, al aplicar esas reglas ella usó mitigadores (e. g. "quedaría" en 4.12 o "espero y estar bien" en 4.14) que la distancian del estado de certeza.

Después de las dos participaciones anteriores en la semana 3, el tutor explicitó las propiedades de la igualdad y pidió a Jeymi resolver ecuaciones utilizando esas propiedades, mismas que la estudiante resolvió exitosamente.

Cuarta participación de Jeymi: Aumento en los niveles de comprensión y en su certeza

En una semana posterior (la cuarta semana de actividades del Módulo 4) el objetivo era que los estudiantes desarrollaran la habilidad de plantear un sistema de ecuaciones que resolviera una situación en la que dos incógnitas están involucradas. El tutor colocó entonces una situación problemática que puede modelarse de forma similar al usado en la primera participación de Jeymi: En un salón de clases hay 61 alumnos. El número de mujeres excede en 7 al número de hombres. ¿Cuántos hombres y cuantas mujeres hay en el salón? La respuesta textual de la estudiante fue la siguiente:

(3.3) primeramente hay que analizar muy bien los datos que se nos dan
(3.4) datos
salón de clases 61 alumnos; x hombres; x + 7 mujeres
(3.5) por lo cual hay 2 datos desconocidos
(3.6) pero de uno se resuelve el otro
(3.7) y tenemos una incógnita denominada "X"
(3.8) que significa hombres
(3.10) Ahora plantearemos la ecuación
(3.11) x + (x + 7) = 61
(3.18) y nos queda así 2x=54
(3.19) ahora vamos a dejar sola la x
(3.20) y para eso hay que dividir entre 2 ambos miembros
(3.21) 2x/2=54/2
(3.22) y nos queda x=27.
(3.24) mujeres X + 7 = 27+7= 34
(3.26) en el salón de clases tenemos 27 hombres y 34 mujeres
(3.27) dando un total de 61 alumnos.

Comprensión conceptual y procedimental. A diferencia de sus anteriores intervenciones, Jeymi mostró mayor comprensión conceptual del signo igual: al usarlo en *concordancia con la acepción matemática aceptada (CC.4)* cuando ella utilizó de forma diferenciada la trasposición de términos (3.18) y una propiedad de la igualdad (3.21) para obtener el valor de la literal (en 3.22); al explicitar *(CC.2)* aspectos relacionados con el signo igual que en su primera intervención dejó implícitos (e. g., en 3.20 explicitó de manera *clara y precisa* la propiedad de la igualdad que usaría y en 3.10 advirtió el planteamiento de una ecuación; CC.5). Asimismo, la verbalización de la propiedad de la igualdad que usó en (3.20) deja ver la posibilidad de una *transferencia* (*CC.3*) del uso de esa propiedad en el contexto de la balanza al contexto de la resolución de problemas. Todo lo anterior muestra en Jeymi un *conocimiento mayor que el promedio* (*CC.6*) en torno al signo igual, ya que sus demás compañeros sólo exhibieron cierta comprensión procedimental sobre ese tema. Cuando ella restringió el uso del signo igual como consecuencia del aumento en su comprensión parece que se vio en la necesidad de sustituir su uso por sustentos que acrecentaron su comprensión conceptual en torno a la variable como incógnita. Por ejemplo, en lugar de colocar expresiones del tipo “incógnita=estuche” (como lo hiciera en 1.2), de 3.5 a 3.8 elaboró un *sustento basado en razones matemáticas* que le permitió plantear la ecuación que resolvía el problema. En ese sustento logró identificar dos incógnitas (3.5) en lugar de sólo una, como lo hiciera en su primera intervención (1.2), apegándose así a la *acepción matemática aceptada*. Asimismo la estudiante *explicitó* los aspectos de la variable como incógnita que guiaron su resolución, a diferencia de su primera intervención en donde los dejó implícitos. Adicionalmente, ella verbalizó con *claridad y precisión* esas reglas. Todo lo anterior muestra un *conocimiento promedio* de la variable.

Asimismo en su resolución Jeymi mostró comprensión procedimental del signo igual que interpretó como equivalencia condicional y de la variable al poner en juego los aspectos que se enuncian en Tabla 3. Cabe aclarar que cuando la estudiante comprobó sus resultados ella acudió a usos imprecisos del signo igual, que utilizó como *separador* (entre la expresión x+7 y la expresión 27+7=34) y como *operador* (27+2=34). En resumen, en su cuarta intervención Jeymi parece mostrar una mayor comprensión procedimental y conceptual en torno al signo igual y a la variable como incógnita con respecto a sus intervenciones anteriores.

La certeza. Cuando Jeymi mostró un aumento en sus niveles de comprensión conceptual parece que ella experimentó certeza. Es posible identificar este estado epistémico cuando ella acudió a *enfatizadores* (e. g. hay que en 3.3 y en 3.20); cuando *actuó* en consecuencia con las reglas que enunció (e.g. en 3.10 anuncia que planteará la ecuación y en 3.11 actúa en consecuencia), reglas que seguramente le empezaban a ser *familiares* al usarlas sin que se le pidiera explícitamente; adicionalmente, porque la estudiante mostró *interés* por resolver el problema cuando precisó las reglas que utilizó, mostró claridad en una exposición que fue lo suficientemente informativa; dejó ver *determinación* al plantear una resolución distinta a la que sus compañeros habían presentado hasta ese momento y mostró *consistencia* en los aspectos anteriores a lo largo de su resolución.

Conclusiones

El análisis empírico aporta evidencias de las mutuas y complejas determinaciones que se pueden dar entre los estados epistémicos y la construcción de conocimientos. En el caso estudiado es posible observar cómo en su primera intervención, la estudiante asesora experimentaba un estado inicial de seguridad relativa. De ahí pasó a la duda (en su segunda intervención), estado que posiblemente actuó como un motor para que ella re-elaborara sus conceptos y explicitara sus procedimientos (ya en la tercera participación), lo que le permitió adquirir nuevos niveles de seguridad pero ahora basados en contenidos matemáticos reformulados sobre los que profundizó en su última participación. Es posible que con la re-elaboración de contenidos y construcción de sustentos que ella consiguió hacer en esta última intervención, Jeymi haya logrado alcanzar altos grados de presunción o incluso certeza. En este estudio se puede apreciar cómo los estados epistémicos pueden ser un freno para la construcción de conocimientos (cuando éstos se sostienen con relativa seguridad), y cómo esos estados epistémicos, como la duda, pueden actuar también como un acicate para el aprendizaje. Por otro lado, se aprecia cómo la construcción de saberes sustentados matemáticamente pueden ser una fuente de certeza. En futuros escritos se pretenden mostrar otras influencias entre los estados epistémicos y la construcción de conocimientos. Sería deseable que el profesor fuera consciente de dichas relaciones.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Bouvier, A., & George, M. (2000). *Diccionario de matemáticas* (2ª edición). Madrid: Akal ediciones.

Dauben, J. W. (1980). El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana. En I. Grattan-Guines (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910.* (pp. 235-282). Madrid: Alianza Editorial.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-18). California: Sage.

Dienes, Z., & Perner, J. (1999). A theory of implicit and explicit knowledge. *Behavioral and brainsciences, 22*(5), 735-808.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle.

Godino, J., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte: NCTM.

Hyland, K. (1998). Persuasion and context: The pragmatics of academic metadiscourse. *Journal of Pragmatics, 30*, 437-455.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–270). Hillsdale:Lawrence ErlbaumAssociates.

Martínez, B. & Rigo, M. (2013).Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual. En A. Ramírez y Y. Morales (Eds.) *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (I CEMACYC) (pp. 548-558). República Dominicana: ICMI.

Martínez B. & Rigo M. (2014[a]).Mathematical certainties in history and distance education.En Liljedahl, P., Oesterle, S., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA, 36*(4), 177-184. Vancouver, Canada: PME.

Martínez, B. & Rigo, M. (2014[b]). ¿Certeza implica comprensión? En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 445-454).Salamanca, España: SEIEM.

Molina M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Rigo, M. (2011). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. En A. B. Alcaraz, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 460-466). Bilbao: SEIEM y Universidad del País Vasco.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 71-91.

Rojano, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Students´ Access to Significant Mathematical Ideas. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 143-163). Mahwak, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Salcedo, A. (2007). *Anatomía de la persuasión*. Madrid: ESIC Editorial.

Schoenfeld, A.H. (2011). *How we think*. New York: Routledge.

Tymoczko, T., (1986). The four-color problem and its philosophical significance. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 243-266). Boston: Birkhäuser.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*. México: Editorial Trillas.