



## **Articulação das Tecnologias Digitais aos processos de Ensinar e Aprender Geometria: Perspectivas de abordagem no Software GeoGebra**

Andriceli **Richit**.

Instituto Federal Catarinense – IFC, Campus Concórdia  
Brasil

andricelirichit@gmail.com

Maria Margarete do Rosário **Farias**.

Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC, Ilhéus, Bahia  
Brasil

margarete333@hotmail.com

Adriana **Richit**.

Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, Campus Erechim  
Brasil

adrianarichit@gmail.com

Mauri Luís **Tomkelski**

Colégio Estadual Professor Mantovani  
Brasil

mauriluis@gmail.com

### **Resumo**

Nos processos de ensino e aprendizagem, a Geometria tem papel preponderante, pois ativa estruturas mentais no movimento que perpassa dados concretos e experimentais para processos que envolvem abstração e generalização de ideias e conceitos. Entretanto, a Geometria tem seguido uma abordagem predominantemente algébrica. Nesse sentido, entendemos que as tecnologias digitais constituem-se em importantes recursos para a discussão de atividades matemáticas. Além disso, consideramos que por meio das tecnologias digitais é possível remover um pouco o fardo algébrico intrínseco a Geometria. Ademais, as tecnologias digitais caracterizam-se como ferramentas úteis para criar um ambiente investigativo, na medida em que propiciam questionamentos, reflexões, análises e fazem com que a sala de aula se torne um lugar onde relações são estabelecidas, possibilitando ao estudante que, por meio de

suas conjecturas, possa construir conhecimento sobre Geometria. Assim, nesta oficina, discutiremos alguns conceitos de Geometria em uma perspectiva de investigação matemática no Software GeoGebra.

*Palavras-chave:* geometria, tecnologias digitais, representações gráficas, software geogebra.

### **Introdução**

Trazemos neste artigo, inicialmente, algumas considerações a respeito dos processos de ensinar a aprender Geometria, perpassando o movimento histórico de sua constituição e problemáticas relacionadas ao seu ensino e aprendizagem em diferentes níveis de ensino. Em um segundo momento discutimos as potencialidades das tecnologias digitais na abordagem da Geometria, em específico trabalhos que articulam as tecnologias digitais aos processos de ensinar e aprender Geometria. Para guiar nossas discussões trazemos resultados de algumas pesquisas que focam os aspectos supracitados. Assim, a proposta de oficina ora apresentada busca (a) promover junto aos participantes familiarização ou ampliação das potencialidades pedagógicas e matemáticas do software GeoGebra e (b) engajá-los em um contexto de investigação matemática em Geometria com o software GeoGebra.

### **Geometria: Movimento Histórico, Problemáticas de Ensino-Aprendizagem e articulação as Tecnologias Digitais**

Assim como ocorreu com outras subáreas da Matemática, a Geometria seguiu um movimento de constituição longo, marcado por divergências e períodos de estagnação. Tal movimento, considerado em sua essência, apresenta-se intimamente ligado ao aspecto visual. De acordo com Fillos (2006), a Geometria pode ser entendida como um corpo de conhecimentos fundamentais para que possamos compreender o mundo, além de propiciar a participação ativa do homem na sociedade, pois pode ser concretizada em todas as instâncias de nossas vidas.

Fillos (2006), fundamentado em Fainguelernt (1995), pontua que a Geometria tem papel preponderante no ensino, pois ativa estruturas mentais no movimento que perpassa dados concretos e experimentais para processos que envolvem abstração e generalização. Acrescentam, ainda, que a Geometria configura-se como um tema integrador entre diversos ramos da Matemática, “sendo a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituintes de sua essência (Fillos, 2006, p. 2).

Analogamente ao que se observa em relação ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral, a Geometria também vem se configurando como uma disciplina complicada, sobretudo pelo fato que se desdobrou em outras subáreas, tais como Geometria Analítica e Plana, e uma algebrização foi se instaurando em sua essência.

Teorizando a respeito da especificidade da Geometria, Kluppel e Brandt (2012, p.05) pontuam que esta:

[...] exige um modo de processamento cognitivo autônomo, com características específicas, em relação a qualquer outra forma de funcionamento do raciocínio. Requer a utilização de registros figurais para designar as figuras e suas propriedades e registros em língua natural para enunciar definições, teoremas, hipóteses.

Em alguns momentos, ao longo da história da instituição desta subárea da Matemática no ambiente escolar, a mesma tem sido colocada em segundo plano devido as dificuldades inerentes aos seus processos de ensino e aprendizagem. Analisando esses aspectos Rosa (2009, p.24) afirma que “O ensino da Geometria no enfoque tradicional enfrenta grandes problemas, seja com relação à formação e conhecimento do professor, aos métodos utilizados, ou ainda as dificuldades encontradas em relacionar a abordagem axiomática e a Geometria prática [...]”.

Destaca, ainda, que sem uma articulação dos aspectos algébricos do Ensino da Matemática aos geométricos, obstáculos acabam se criando e privando os estudantes de um desenvolvimento integral dos processos de pensamento (Rosa, 2009).

Ademais, destacar a relevância da Geometria não significa minimizar a importância da Álgebra, pois há a necessidade de desenvolver nos estudantes, tanto um pensamento de natureza visual, o qual é intrínseco e próprio da Geometria, quanto um pensamento de natureza sequencial, próprio da Álgebra. Nessa perspectiva Regina Pavanello (1989), pesquisadora brasileira, afirma que:

A Geometria apresenta-se como um campo profícuo para o desenvolvimento da “capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender, o que é imediatamente sensível”, que é um dos objetivos do ensino da Matemática, oferecendo condições para que níveis sucessivos de abstração possam ser alcançados. Partindo de um nível inferior, no qual reconhece as figuras geométricas, embora percebendo-se como todas indivisíveis, o aluno passa, no nível posterior, a distinguir as propriedades dessas figuras; estabelece, num terceiro momento, relações entre as figuras e suas propriedades, para organizar, no nível seguinte, sequências parciais de afirmações, deduzindo cada afirmação de uma outra, até que, finalmente, atinge um nível de abstração tal que lhe permite desconsiderar a natureza dos objetos e do significado concreto das relações existentes entre eles (p.182).

Para além disso, a autora chama a atenção à postura do professor ao trabalhar com a Geometria, assinalando que este não trabalha “[...] as relações existentes entre as figuras, fato esse que não auxilia o aluno a progredir para um nível superior de compreensão de conceitos” (Pavanello, 2001, p. 183).

Na perspectiva dos entendimentos explicitados, discussões que envolvem as problemáticas dos processos de ensinar e aprender Geometria assumem orientações diversas que transitam entre questões pedagógicas e metodológicas do ensino. Nesse movimento vem se consolidando uma frente de pesquisas que tomam as tecnologias digitais como possibilidades de promover compreensões “[...] de relações geométricas sem a necessidade de memorização e utilização de estratégias rigorosamente elaboradas, ou técnicas de resolução analítica e, com as TI a experimentação passa a obter um papel importante na produção matemática (Santos, 2006, p. 24)”.

Corroborando a autora supracitada, acreditamos que a utilização das tecnologias digitais podem deflagrar transformações no modo de pensar e produzir conhecimento, sobretudo no que diz respeito à Geometria, quer seja em nível fundamental, médio ou superior. A fim de ilustrar como as tecnologias digitais podem contribuir nos processos de ensinar e aprender Geometria, apresentamos agora os resultados de algumas pesquisas que focam a construção do conhecimento em ambientes permeados por recursos tecnológicos, tais como softwares de geometria dinâmica entre outros.

Santos (2006) investigou como se dá a exploração dos conceitos de Geometria Espacial em ambientes online (TelEduc), considerando aspectos como a verificação de propriedades, criação

e validação de conjecturas, partindo do desenvolvimento de atividades investigativas por meio do uso do software Wingeom. Como resultados de sua investigação, a autora destaca que o conhecimento é algo produzido a partir de um coletivo intelectual, o qual é composto por humanos e mídias, num movimento de reorganização do pensamento.

Santos (2011), por sua vez, trabalhando em uma perspectiva de abordagem dinâmica a Geometria Analítica Plana, desenvolveu uma pesquisa que buscou entender como se constitui/se caracteriza um ambiente de aprendizagem e exploração dos conceitos de Retas, Circunferências e Cônicas, a partir do desenvolvimento de atividades exploratório- investigativas no software GeoGebra com alunos do Curso de Licenciatura em Matemática. Como considerações acerca do trabalho desenvolvido, o autor aponta que estudar tópicos de Geometria Analítica Plana com o apoio do software GeoGebra contribuiu para a constituição/caracterização de um ambiente capaz de privilegiar as ações dos alunos na construção do conhecimento matemático, proporcionando ricas possibilidades de visualização de conceitos e propriedades, além de privilegiar a experimentação matemática e dar ênfase à interpretação de construções geométricas, que são difíceis de serem trabalhadas em sala de aula dispendo-se apenas de lousa e giz. Conclui o trabalho, destacando a importância de promover situações por meio das quais os estudantes possam construir o conhecimento de modo significativo e em consequência, contribuir com a formação inicial destes futuros professores. Destaca, ainda, que a experiência do trabalho de experimentação, visualização e conjecturação deverá ser lembrada em sua prática pedagógica quando em atividade docente.

Ainda sobre a utilização das tecnologias digitais no contexto da Geometria, Heitmann (2013) desenvolve uma pesquisa de mestrado que segue perspectivas semelhantes as já apresentadas. Tomando por contexto, a disciplina “Prática de Ensino III: Construções Geométricas” ofertado pelo Centro de Educação Aberta e a Distância da Universidade Federal de Ouro Preto (CEAD/ UFOP), na qual o pesquisador desenvolve em uma das aulas, ao longo da disciplina, uma atividade intitulada “Polígonos: Dobras, Cortes e Geometria Dinâmica”. Essa atividade foi desenvolvida em ambiente online, direcionada por um roteiro de atividade, um editor de texto colaborativo, sala de bate papo e o Software GeoGebra. Como resultados, o autor destaca como fator preponderante no desenvolvimento de atividades nessa modalidade, a comunicação por meio de diversas interfaces, a participação coletiva no processo de investigação e o papel da Internet no coletivo pensante.

Os resultados apresentados por Heitmann (2013) revelam que algumas evoluções vêm ocorrendo nos processos de ensinar e aprender Geometria. Tomemos uma aula que não se considerasse as tecnologias digitais no desenvolvimento das atividades que ele propôs: será que haveria interação entre os estudantes e o conteúdo no desenvolvimento das atividades? Seria possível os estudantes observarem/vivenciarem diferentes possibilidades de exploração dos conceitos? Haveria o engajamento dos estudantes na atividade proposta?

Ressaltamos aqui que não estamos dizendo que há métodos de abordar determinados conceitos que são melhores ou piores que os outros. Apenas estamos destacando as potencialidades do trabalho pedagógico e investigativo que as tecnologias digitais possibilitam e as contribuições que trazem à construção de conceitos matemáticos.

Richit (2005), trabalhando na perspectiva construcionista e da pedagogia de projetos, engaja três duplas de estudantes da Licenciatura em Matemática, os quais desenvolvem

atividades envolvendo Geometria Analítica usando o Geometricks, um software de geometria dinâmica. As atividades desenvolvidas pelos estudantes privilegiavam vetores, combinação linear, elipse, hipérbole, produto vetorial entre outros. Como resultados, a autora pontua a valorização do saber do aluno, pois muitos apresentavam dificuldades conceituais no desenvolvimento dos projetos em face do uso do software Geometricks, as quais foram desaparecendo na medida em que necessitavam repensar esses conceitos do ponto de vista da tecnologia. Assim, havia um movimento recíproco nesse processo: a tecnologia ajudava-os a entender a Geometria Analítica, ao tempo que a tecnologia demandava conhecimentos sobre Geometria Analítica. Finalizando, a autora destaca a importância desse tipo de abordagem, tanto para a construção de conceitos que também são necessárias em outras disciplinas como Cálculo, Álgebra Linear, bem como para a futura atuação docente destes estudantes em sala de aula.

Bilac (2008) desenvolve uma pesquisa que se situa na inter-relação das tecnologias digitais aos processos de ensinar e aprender Geometria, em particular no que se refere às Transformações Geométricas Planas. Trabalhando na perspectiva de experimentos de ensino, envolveu alunos do 8º ano de uma escola privada em sequências didáticas envolvendo simetria axial e simetria de rotação, utilizando para o desenvolvimento das mesmas o software Cabri-Géomètre. A pretensão da autora em trabalhar nesta abordagem consistia em compreender se o desenvolvimento de atividades matemáticas, associado ao uso de um software, trazia contribuições aos alunos quanto à aprendizagem das transformações geométricas.

Com a realização dos experimentos de ensino, a autora evidenciou, por meio das interações dos alunos nestas atividades, importantes resultados, visto que os experimentos de ensino realizados favorecem interpretações cognitivas aos diferentes níveis de conhecimentos das noções geométricas: intrafigural, interfigural e transfigural, auxiliadas pelos recursos e ferramentas do software Cabri-Géomètre.

Por sua vez Rosa (2009) realiza uma investigação do tipo estado da arte, analisando teses e dissertações desenvolvidas no âmbito no Programa de Educação Matemática da PUC/SP, que se encontravam no movimento de articulação das tecnologias digitais aos processos de ensinar e aprender Geometria, no período de 1994 a 2007. Por meio dessa análise buscou evidenciar as tendências que configuram os trinta e dois trabalhos tomados para a análise. A partir das pesquisas analisadas Rosa (2009) diz que embora as tecnologias, em específico softwares de Geometria dinâmica possibilitem abordagens interessantíssimas aos conceitos de Geometria, estes não garantem a efetivação da aprendizagem dos estudantes, pois “O Ambiente Computacional pode ser algo motivador, mas não é dele o papel e responsabilidade do ensinar e aprender, e sim dos professores e alunos” (Rosa, 2009, p. 97-98).

Além disso, a literatura em Educação Matemática tem enfatizado as potencialidades das tecnologias digitais, as quais crescentemente têm se mostrado importantes na abordagem de ideias e conceitos matemáticos. Em especial, a Geometria e os softwares desenvolvidos para a abordagem dos seus conceitos possibilitam, por meio de,

[...] ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas, são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de “desenhos em movimento”, e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínsecas

ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento (Gravina, 1996, p. 6)

Corroboramos a Andrade (2010) no que diz respeito à utilização das tecnologias digitais aos processos de ensinar e aprender Geometria, posto que esses recursos conferem um caráter geométrico à abordagem dos conceitos e que as abordagens com registros geométricos permitem a visualização de diferentes características dos objetos, as quais não são perceptíveis em outros tipos de registros como os de natureza algébrica.

Por exemplo, a abordagem de conceitos de Geometria, como o de lugar geométrico, no Software GeoGebra, pode propiciar a relação existente entre o lugar geométrico descrito por um ponto que se move sobre uma reta ou uma curva e sua equação, de acordo com o princípio da reciprocidade da Geometria Analítica. Muitas vezes, a noção de lugar geométrico segue uma abordagem algébrica apenas, não possibilitando que o estudante construa esquemas mentais que lhe permitam compreender a equação que representa o respectivo lugar geométrico. Por exemplo, qual o lugar geométrico do ponto cujas coordenadas são  $P(t+1, 2t)$ ? De modo algébrico, estabelecendo as relações e escrevendo  $y$  em função de  $x$ , temos:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \end{cases}$$
 . Isolando  $t$  na primeira equação, temos  $t = x - 1$ . Substituindo  $t = x - 1$  na segunda equação, temos:

$$y = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$$

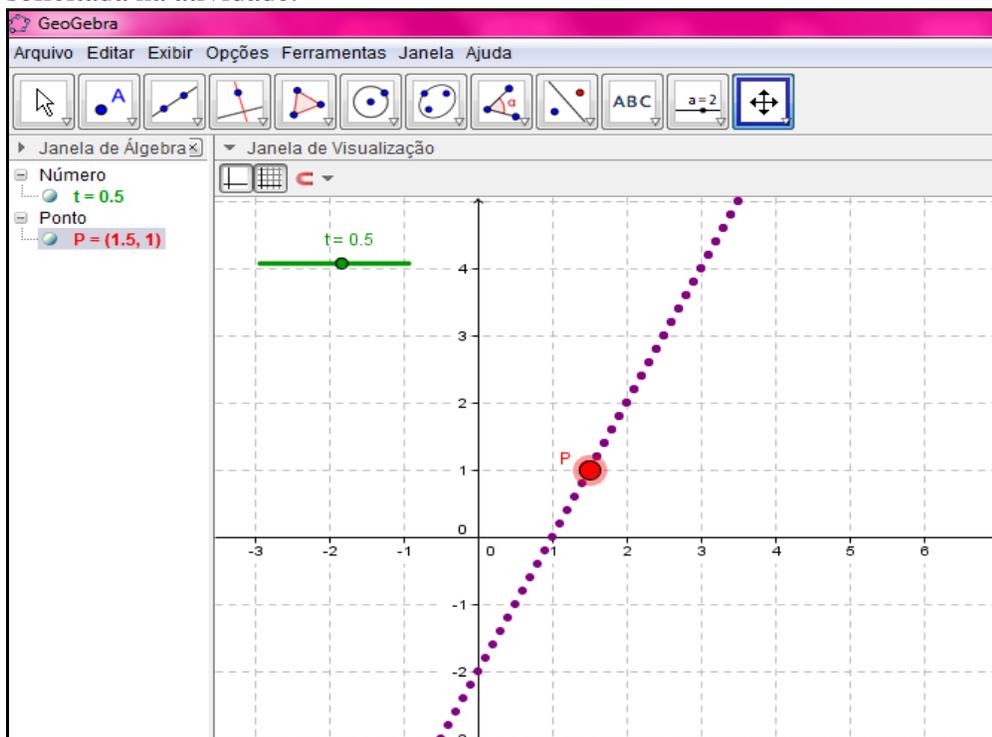
Assim, o lugar geométrico associado ao conjunto de pontos genéricos do ponto  $P$  é a reta de equação:  $y = 2x - 2$ . Notemos que esta abordagem apenas possibilita ao estudante que encontre a equação da reta, mas a efetiva compreensão geométrica desta relação estabelecida apresenta-se falha e incompleta. Vejamos agora como esta mesma situação pode ser abordada considerando as potencialidades de um software. Aqui tomaremos o GeoGebra para explorarmos este conceito, conforme roteiro investigativo apresentado a seguir:

### Atividade-Explorando geometricamente a ideia de Reta (equação paramétrica)

1. Sejam  $x$  e  $y$  as coordenadas de um ponto  $P$ , expressas respectivamente por  $t + 1$  e  $2t$ .
2. Inicialmente, entre com o parâmetro  $t$  (também chamado controle deslizante). Para isso, digite no Campo Entrada do GeoGebra  $t = 1$  e tecla enter. Após, clique com o botão direito do mouse sobre o parâmetro  $t$  e selecione a opção exibir objeto. Feito isso, o parâmetro  $t$  aparecerá na janela gráfica do GeoGebra.
3. Explore propriedades, cor e estilo.
4. Agora, entre com um ponto  $P$  cuja abcissa é igual a  $t+1$  e a ordenada igual a  $2t$ . Para isso, digite no Campo Entrada do GeoGebra,  $P=(t+1, 2t)$  e tecla enter. Explore propriedades do ponto  $P$ .

5. Pretende-se que o ponto P deixe um rastro de forma a mostrar que a cada valor assumido pelo parâmetro  $t$  tenhamos coordenadas diferentes para P. Para isso clique com o botão direito do mouse sobre o ponto P ou na sua definição na janela algébrica e selecione a opção “Habilitar Rastro”.

6. Anime o parâmetro  $t$  e anote o que acontece? A figura a seguir ilustra a representação solicitada na atividade.



7. O que determina esse conjunto de diferentes coordenadas relacionadas ao ponto genérico P?

8. Como fica esse rastro deixado pelo ponto P no plano?

9. Existe um modo de expressarmos matematicamente o rastro deixado pelo ponto P relacionado ao parâmetro t?

E a este tipo de abordagem que os conceitos deveriam assumir, de caráter investigativo, propiciando o pensar do estudante e dando a ele chances de pensar matematicamente e construir seu conhecimento.

## **2. Organização Metodológica da Oficina**

A proposta de oficina ora apresentada será desenvolvida em Laboratório de Informática, com software GeoGebra devidamente instalado. No máximo vinte participantes serão aceitos, de modo que a interação entre participantes e ministrantes não seja prejudicada. Os participantes poderão ser alunos da Licenciatura/Bacharelado em Matemática, professores da Educação Básica ou Ensino Superior. A oficina dar-se-á em dois momentos: Em um primeiro momento, desenvolveremos uma atividade de familiarização junto aos participantes. Em um segundo momento prosseguiremos com atividades envolvendo alguns conceitos concernentes a Geometria, tais como Lugar Geométrico e Cônicas. Destacamos que durante o desenvolvimento da oficina trabalharemos em uma perspectiva de investigação matemática, lançando mão do software GeoGebra.

## **Referências**

- Andrade, J. P. G (2010). *Vetores: interações à distância para aprendizagem de Álgebra Linear*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.
- Bilac, C. U. (2008). *Possibilidades da aprendizagem de transformações geométricas com o uso do Cabri-Géomètre*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Fainguelernt, E. K. (1995). O Ensino de Geometria no 1º e 2º Graus. *Educação Matemática em Revista*, 4, 45-52.
- Fillos, L.M. (2006). O Ensino da Geometria: Depoimentos de Professores que fizeram História. En: *Anais do X Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. (pp.01-07). Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil.
- Gravina, M. A. (1996). Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*. Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil.
- Heitmann, F. P. (2013). *Atividades investigativas em grupos online: possibilidades para a educação matemática a distância*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, Brasil.
- Kluppel, G. T. & Brandt C. F. (2012). Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval. En: *Anais do IX Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul*. (p. 01-18). Caxias do Sul, Rio Grande do Sul, Brasil.
- Pavanello, R. M. (1989). *O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica*.

*Articulação das Tecnologias Digitais aos processos de Ensinar e Aprender Geometria: Perspectivas de abordagem no Software GeoGebra*

Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, Brasil.

- Pavanello, R.M. (2001). Geometria: Atuação de professores e aprendizagem nas séries iniciais. En: *Anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática*. (pp. 172-183). Curitiba, Paraná, Brasil.
- Richit, A. (2005). *Projetos em Geometria Analítica Usando Software de Geometria Dinâmica: repensando a Formação Inicial Docente em Matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, Brasil.
- Rosa, K. C. (2009). *Ambientes computacionais no contexto da Geometria: Panorama das teses e dissertações do Programa de Educação Matemática da PUUC-SP de 1994 a 2007*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Santos, I. N. (2011). *Explorando conceitos de geometria analítica plana utilizando tecnologias da informação e comunicação: uma ponte do ensino médio para o ensino superior construída na formação inicial de professores de matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil.
- Santos, S. C. (2006). *A Produção Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem: o caso da Geometria Euclidiana Espacial*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, Brasil.