



Una propuesta de enseñanza sobre la función lineal en el contexto de proyectos productivos agroindustriales

Ligia Amparo **Torres** Rengifo
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
liamtore@yahoo.es
Ofelia **Angulo** Vallejo
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
ofeliava@gmail.com

Resumen

En este taller se presentan, dos de las cinco situaciones de la Unidad didáctica diseñada en el marco del proyecto *Análisis de la articulación de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal*. Esta unidad didáctica se implementó con estudiantes del grado 9° de la Institución Educativa (IE) Policarpa Salavarrieta del municipio de Yumbo¹, en el periodo académico 2012. El proyecto se fundamenta en una propuesta de Análisis Didáctico, que incluye un contexto curricular, un análisis de contenido (Modelación, Análisis Fenomenológico, Estructura Conceptual y Sistemas de Representación) y un análisis de instrucción. En la primera situación se pretende que los estudiantes identifiquen variaciones lineales en situaciones problemáticas, reconociendo la relación entre las magnitudes que intervienen en estas y, en la segunda, se orienta a los estudiantes para que identifiquen una relación de dependencia proporcional entre magnitudes y traduzcan su representación tabular a una algebraica, para un modelo de función lineal.

Palabras clave: análisis didáctico, unidad didáctica, función lineal, situaciones problemáticas, modelación matemática.

¹ Municipio ubicado en el Departamento del Valle del Cauca – Colombia.

Planteamiento del problema y antecedentes

Este proyecto parte de reconocer la problemática presentada en la escuela sobre la falta de consideración del contexto sociocultural e institucional en el cual se desarrolla la actividad matemática particularmente en el campo algebraico, se debe a la forma como tradicionalmente se imparte la educación en el aula, en donde según Freudenthal (1983) se presenta una situación que él denominó *Inversión Antididáctica* la cual consiste en comenzar por los conceptos y no por la actividad matemática, enfoque contrario a su propuesta de Fenomenología didáctica que toma los fenómenos del mundo real y de las matemáticas que precisan ser organizados y los interpreta a través de conceptos matemáticos que son los medios de organización a partir de los cuales se enseña al estudiante a manipular el concepto involucrado.

En un área específica como el álgebra, Kieran (1992) muestra en los resultados de sus investigaciones, que las dificultades presentadas por los estudiantes para el aprendizaje de esta asignatura están asociadas al aprendizaje, la enseñanza y el contenido y en estos tres aspectos se logra identificar la honda brecha ontológica entre las concepciones operacional y estructural, que desde la perspectiva del aprendizaje, principalmente se manifiesta en las reacciones de la mayoría de los estudiantes cuando comienza el estudio de las expresiones algebraicas y no logran comprender la estructura algebraica, puesto que no han alcanzado a desarrollar el álgebra en su parte estructural; de ahí sus intentos fallidos para convertir expresiones y/o situaciones problemáticas en ecuaciones, simplificar expresiones, operar sobre una ecuación como un objeto, entender que el signo igual es un símbolo de simetría más que el anunciante de un resultado, considerar las letras como variables o como “cantidades dadas”, traducir problemas de palabras a ecuaciones, ver la estructura escondida de las ecuaciones y usar el álgebra como herramienta para probar relaciones numéricas.

Al respecto, Sfard (1991) reconoce la naturaleza dual de las concepciones matemáticas y enfatiza que estas dos concepciones operacional y estructural, no son mutuamente excluyentes sino que por el contrario se complementan ya que cualquier concepto matemático debe ser definido tanto estructural (como objeto) y operacionalmente (como proceso), para lograr un mayor entendimiento del mismo. Un ejemplo de esta dualidad de la interpretación, se observa con la dualidad del significado del signo igual (=) que en algunos casos actúa como símbolo de igualdad y en otros como una instrucción para obtener un resultado.

Arce, Torres, Ramírez, Valoyes, Malagón y Arboleda (sf) plantean en el marco de la perspectiva didáctica, que desde la etapa inicial del proceso de construcción de pensamiento algebraico, es fundamental la movilización de elementos asociados a la variación, los cuales permiten pasar del mundo de la cantidad al mundo de las relaciones, a través de la identificación de relaciones funcionales; estableciendo que el pensamiento algebraico integra el concepto de variables con todas sus connotaciones, usos y conexiones, es decir acepta la existencia de lo desconocido o lo que varía, representarlo a través de símbolos y operar sobre ello. Esto conlleva a que al pasar al campo específico del concepto de función, también se contemplen dificultades asociadas a su definición, a su simbolismo, a los modelos que esquematiza, a la amplia gama de sus aplicaciones y además a sus diversas formas de representación.

Esta proyecto asume estos dos grandes problemas, la descontextualización del saber matemático y la relación entre lo procedimental y estructural en la construcción de saberes algebraicos, se desarrolla en la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta que ofrece especialidad Agroindustrial para la media técnica por cuanto dicha institución no está exenta de

la problemática respecto a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y el álgebra, además no existe articulación entre los contenidos curriculares del área de matemáticas y las situaciones provenientes de los proyectos productivos agroindustriales que desarrolla la especialidad; por esta razón se adelantó a partir del segundo semestre de 2012 este proyecto que permite caracterizar la articulación de situaciones problémicas de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal, mediante una propuesta de Análisis Didáctico y de esta forma contribuir con la integración de los estudiantes en el próximo nivel de enseñanza media, potenciar su aprendizaje y dar respuesta al interrogante de investigación planteado:

¿Cómo caracterizar la articulación de situaciones problémicas de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal, mediante una propuesta de Unidad Didáctica, para el grado 9° de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta?

Marco teórico de referencia

Este trabajo se inscribe en el campo de la Didáctica de las Matemáticas y dentro de la propuesta del Grupo de investigación Pensamiento Numérico Algebraico (PNA) que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos en el sistema educativo y en el medio social; estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas y de este se toma la propuesta de Análisis didáctico como marco teórico y metodológico que direccionó este proyecto.

En este marco de referencia se asume que el conocimiento producido al interior de la Didáctica de las Matemáticas, denominado *conocimiento didáctico*, proporciona los elementos fundamentales que requiere un profesor para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas; estos elementos son reconocidos como *organizadores del currículo de matemáticas* y según Rico (1997) son aquellos conocimientos fundamentales que requiere un profesor para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas. La articulación y concreción de estos conocimientos didácticos conforman el *Análisis Didáctico* que es un proceso cíclico para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas e identificar las actividades que idealmente un profesor debería realizar para organizar la enseñanza de un contenido matemático concreto. Este *Análisis Didáctico* se basa en cuatro análisis: el de contenido, el cognitivo, el de instrucción y el de actuación.

El *Análisis de contenido* es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares; el *Análisis cognitivo* es una reflexión e indagación acerca de por qué, cómo y cuáles dificultades, obstáculos y errores se presentan con mayor frecuencia en el aprendizaje de los estudiantes al abordar el estudio de un contenido matemático particular; el *Análisis de instrucción* se refiere a una fundamentación teórica sobre las nociones básicas que orientan la enseñanza, el aprendizaje de las matemáticas y los procesos de evaluación y el *Análisis de Actuación* que le permite al profesor determinar las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento.

El *Análisis Didáctico* culmina con la elaboración de una Unidad didáctica que es un documento donde el profesor concreta los objetivos, contenidos, tareas, recursos y materiales, instrumentos de evaluación y orientaciones metodológicas que serán objeto de trabajo en clase con los alumnos, en un período determinado de tiempo y que, a juicio del profesor, mantienen unidad según criterios principalmente conceptuales; esta Unidad didáctica debe estar dirigida a

un grupo concreto de alumnos y referirse a un contenido matemático específico y está enmarcada en un contexto sociocultural determinado. Esta propuesta se complementa con el Análisis del Contexto curricular en el cual se propone el trabajo de aula.

El propósito de este proyecto fue diseñar, planificar y desarrollar una Unidad didáctica como propuesta curricular, que para su diseño requiere seleccionar y secuenciar un conjunto de conceptos y procedimientos sobre tópicos matemáticos relacionados con la función lineal; para efectos prácticos de su desarrollo, se dio relevancia al Análisis de contenido, sin desconocer los aspectos de los otros análisis. Este Análisis comprende aspectos relacionados con la estructura conceptual de la función lineal, sus sistemas de representación, la fenomenología y la modelación matemática donde se analizaran las tendencias actuales principales sobre esta temática y los principios de la Educación Matemática Realista; el Análisis curricular aunque no aparece dentro de la estructura del Análisis Didáctico, se tuvo en cuenta en tanto que el currículo constituye una herramienta básica para el trabajo del profesor de matemáticas de secundaria, válida para la planificación y desarrollo de unidades didácticas.

De otra parte el Análisis de instrucción que comprende el diseño propiamente de la Unidad didáctica se realizó a partir del diseño de situaciones problemáticas formuladas en el contexto de los proyectos productivos agroindustriales seleccionados; el Análisis cognitivo se realizó a partir de las principales dificultades, obstáculos y errores que presentaron los estudiantes al desarrollar las diversas tareas que conforman la unidad didáctica y finalmente el Análisis de actuación se desarrolló durante la etapa de evaluación de los resultados y permitió determinar las capacidades que los escolares han desarrollado durante el proceso.

Metodología y propósito del taller

Este taller, como espacio de interacción entre los proponentes y los maestros, investigadores y asistentes, en general, mediado por la lectura y análisis de las situaciones problemáticas para movilizar reflexiones sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones, se ha organizado en cuatro momentos. Un primer momento (20 minutos) donde se presentarán los aspectos más relevantes del proyecto (problemática, propósitos, justificación y referentes teóricos y metodológicos); un segundo momento (40 minutos) donde se trabajará la situación 1 (Preparación de la mezcla para el pandebono y la relación uno a uno entre magnitudes), en grupos de 3 o 4 personas asistentes al taller; un tercer momento (40 minutos) donde se trabajará la situación 3 (Comercializando los pandebonos y la función lineal), se realizará utilizando el mismo esquema del segundo momento. Finalmente, se realizará una plenaria (20 minutos) para socializar el análisis y las reflexiones de los grupos de trabajo. Al finalizar el taller se recogerán las conclusiones y las recomendaciones para mejorar esta propuesta de trabajo en el aula. Ver fichas de reflexión en el Anexo 1.

Este taller tiene como propósito compartir algunas situaciones y tareas de la Unidad Didáctica del proyecto, aquí expuesto, que articula el contexto del proyecto productivo de pandebonos y algunos aspectos de la función lineal. Además, interactuar con los participantes a través de sus análisis y reflexiones sobre la pertinencia de las tareas, sus contenidos matemáticos y los desempeños que movilizan.

Plan de acción del taller

La situación 1, tiene como propósito que los estudiantes identifiquen comportamientos de variaciones lineales al interior de situaciones problemáticas y así mismo que reconozcan la

relación entre magnitudes que intervienen en situaciones de variación (cantidad de queso vs cantidad de pandebono; cantidad de areparina vs cantidad de pandebono).

Situación 1: Preparación de la mezcla para el pandebono y la relación uno a uno entre magnitudes

Los estudiantes del grado 9°1 de la IE Policarpa Salavarrieta han gestionado la producción de pandebono en pro de la Unidad Productiva conformada desde el año lectivo 2011. La gestión de este proceso ha consistido en realizar actividades según las etapas de: preventa, preparación del laboratorio (asepsia), alistamiento, producción y comercialización. En la etapa de producción de pandebonos se parten porciones de masa de 60 g y con ellas se forman pandebonos del mismo tamaño y forma; dicha masa se prepara conforme a la siguiente relación de materias primas

Tabla 1

Relación materias primas fabricación pandebonos

Materia Prima	Cantidad en gramos
Queso costeño	4.000
Almidón agrio	5.000
Areparina	1.000
Azúcar	1.000
Mantequilla	2.000
Leche en polvo	1.000
Total de materia prima	14.000

Para esta relación de materias primas, el número aproximado de pandebonos producidos es de 250 unidades.

Tarea 1: Comprendiendo la situación

Teniendo en cuenta las cantidades relacionadas en la tabla anterior, realice o responda lo siguiente:

1. Si se utilizan 8.000 gramos de queso costeño y se ajustan las cantidades necesarias de los otros ingredientes para producir pandebonos considerando la misma receta, ¿cuántos pandebonos se pueden producir? Indique cómo lo calculó.
2. Calcule la cantidad de gramos de queso costeño requerido para fabricar 50, 100, 150, 200, 350, 600 y 1.000 pandebonos. Explique cómo obtuvo los resultados solicitados.
3. Realice una tabla donde se muestre el número de pandebonos y los gramos de queso requeridos según los datos del punto 2.
4. Si se utilizan 2.000 gramos de queso costeño y se ajustan las cantidades necesarias de los otros ingredientes para producir pandebonos sin alterar la receta, ¿cuántos pandebonos se pueden producir? Indique cómo lo calculó.
5. Calcule la cantidad de gramos de areparina requeridos para fabricar 50, 100, 150, 200, 350, 600 y 1.000 pandebonos.

Tarea 2: Relación entre magnitudes

A partir de los resultados de la actividad anterior, realice lo indicado y responda las siguientes preguntas:

1. Calcule el número de pandebonos que sin alterar la receta se pueden producir con 240 g. de queso costeño, con 560 g., con 6.000 g. y con 4.800 g, teniendo los gramos necesarios de los otros ingredientes.
2. Complete la siguiente tabla y explique cómo obtuvo los resultados

Tabla 2

Relación gramos de queso costeño vs número de pandebonos

Gramos de queso costeño				7.200	8.000		12.800	13.600
Número de pandebonos	1	100	400			700		

3. Determine las magnitudes y cantidades que intervienen en la situación y sus unidades de medición.
4. Escriba de qué depende la cantidad de queso utilizado en cada caso. Explique su respuesta.
5. Escriba cuánto queso se requiere para producir un pandebono.
6. Escriba una expresión que permita calcular la cantidad de gramos de queso necesarios para producir una **cantidad cualquiera** de pandebonos.

Tarea 3: Validando la relación entre magnitudes

A partir de los resultados del numeral 5 de la Tarea 1, realice lo indicado y responda las siguientes preguntas:

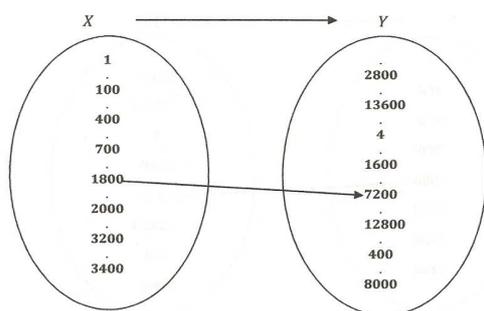
1. Complete la siguiente tabla para el caso de la cantidad de areparina necesaria para producir pandebonos:

Tabla 3

Relación gramos de areparina vs número de pandebonos

Gramos de areparina				7.200	8.000		12.800	13.600
Número de pandebonos	1	100	400			700		

2. Escriba una expresión que permita calcular los gramos de areparina requeridos para fabricar una **cantidad cualquiera** de pandebonos.
3. Explique la validez de la siguiente afirmación:
“Para un número determinado de pandebonos a producir, existe una única cantidad gramos de queso necesario para esta producción”
4. Complete el siguiente diagrama que relaciona:
Número de pandebonos (**X**) Cantidad de gramos de areparina (**Y**)



- Plantee por lo menos dos situaciones, en contextos diferentes a la producción de pandebonos, en las cuales se presenten relación entre cantidades o magnitudes.

Para la situación 3, se espera que los estudiantes identifiquen una relación de dependencia proporcional entre magnitudes y traduzcan un sistema de representación tabular a una expresión algebraica para un modelo de función lineal, de otro lado que calculen la razón de cambio a partir de una gráfica cartesiana, identifiquen relaciones lineales de tendencia decreciente y comprendan los conceptos de costo de producción y ganancia

Situación 3: Comercializando pandebonos y la función lineal

El costo de producción de 350 pandebonos, fabricados por los estudiantes del grado 9º de la IE Policarpa Salavarrieta, en pro de la Unidad Productiva conformada desde el año lectivo 2011, teniendo en cuenta el costo de las materias primas, del transporte y de las bolsas para empaques, fue de \$108.500 y el precio de venta de cada pandebono es de \$500². A partir de esta información desarrolle las siguientes tareas:

Tarea 1: Relación entre representación tabular y expresiones algebraicas

- Encuentre el costo de producción de un pandebono según el valor de producción de 350 unidades y explique cómo obtuvo este valor.
- Teniendo en cuenta lo realizado en el punto 1, complete la siguiente tabla donde se registra costo y ganancia de cierta cantidad de pandebonos.

Tabla 4

Relación de costo de producción, ganancia vs número de pandebonos

Número de pandebonos producidos y vendidos	1	100			300		450	500	
Costo de producción de pandebonos (en \$)			62.000			108.500			186.000

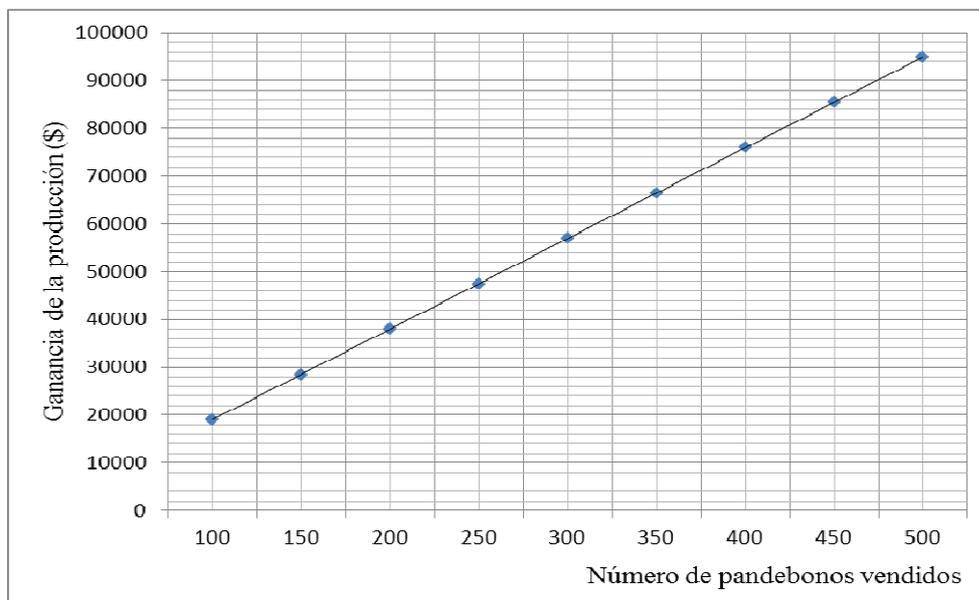
² Para resolver esta Situación asuma que el costo de las materias primas, del transporte y de las bolsas se puede totalizar y asumir como un solo costo que se altera dependiendo del número de pandebono a producir, aunque en la vida diaria no se podría asociar porque el transporte no se paga por el número de pandebonos transportados, mientras que el costo de materias primas y el de las bolsas depende del número de pandebonos a producir.

Ganancia obtenida (en \$)				47.500	57.000		85.500		
---------------------------	--	--	--	--------	--------	--	--------	--	--

3. Explique qué le sucede al costo de producción de los pandebonos cuando se aumenta el número de pandebonos a producir. De un ejemplo.
4. Escriba un comentario sobre la siguiente afirmación: “No tiene sentido en el contexto de la producción de pandebonos hablar de $\frac{1}{2}$ pandebono o de $5\frac{1}{2}$ pandebonos”
5. Explique la siguiente expresión $Y = 310X$, si Y es el costo de producción de X número de pandebonos.
6. Explique por qué es menor la diferencia entre el costo y la ganancia cuando se producen 100 pandebonos que cuando se producen 500 o más.

Tarea 2: Lectura e interpretaciones de representaciones gráficas

1. Verifique si en la Gráfica 1, los puntos corresponden a las coordenadas determinadas y registradas en la Tabla 4, una vez diligenciada (punto 2 de la Tarea 1).



Gráfica 1. Ganancia al comercializar X número de pandebonos.

2. Tome dos puntos de la gráfica 1 y encuentre la razón de cambio para la ganancia al comercializar los pandebonos.
3. Explique el significado de la coordenada (0,0) para la Gráfica de Ganancia.
4. Escriba el significado de conectar con una recta, los puntos trazados en la gráfica de Ganancia.
5. Respecto a la gráfica 1, escriba el procedimiento utilizado para obtener el resultado y explique su significado.
 - a. Encuentre la razón de cambio que corresponde a una producción comprendida entre 250 y 450.

- b. Encuentre la razón de cambio que corresponda a una producción comprendida entre 450 y 500 pandebonos.
 - c. Explique en cuánto varía la ganancia en relación a la variación del número de pandebonos vendidos.
 - d. Indique cómo se refleja esta variación en la forma de la gráfica.
6. a. Encuentre el número de pandebonos que generan unos costos de producción de \$130.000.
 - b. Encuentre la ganancia correspondiente a este costo de producción de \$130.000.

Tarea 3: Relaciones lineales de tendencia decreciente

Valentina considera que debe haber alguna forma de bajar los costos de producción de cada pandebono si se logra aumentar el número de pandebonos que se fabrican en cada producción y propone la siguiente tabla donde se relacionan los costos de producción unitario y el número de pandebonos a producir:

Tabla 5

Relación costos producción unitario por pandebonos

Costos de producción unitario (\$)	300	250	200	150	100
Número de pandebonos a producir	100	200	300	400	500

1. Con los resultados de la tabla anterior, realice una gráfica en el plano cartesiano, ubicando en el eje horizontal el número de pandebonos y en el eje vertical, los costos de producción unitarios.
2. Observe y describa la tendencia de la gráfica obtenida. Explique, si en el contexto de esta tarea, tiene o no sentido conectar los puntos de esta gráfica, con una recta.
3. Tome dos puntos de esta gráfica y realice el proceso para calcular la razón de cambio. Interprete este resultado.
4. Escriba la expresión algebraica que describe la relación anterior.
5. Observe en la gráfica el costo correspondiente a una producción de pandebonos de cero. Registre este dato e interprételo.
6. ¿Está de acuerdo con el planteamiento de Valentina? Explique su respuesta.

Conclusiones

Mediante la realización de este taller se espera ratificar la pertinencia de una *Unidad didáctica* que ha sido diseñada como propuesta curricular a partir de articular los diversos análisis que conforman el Análisis didáctico (de contenido, cognitivo, de instrucción, de actuación, contexto curricular) en un solo documento estructurado por un conjunto de actividades a desarrollar (Situaciones) en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos, constituyendo una unidad de programación y actuación docente dirigida a un grupo concreto de alumnos (estudiantes de 9º grado de la IE Policarpa Salavarrieta), referida a un contenido matemático específico (función lineal) y enmarcada en un contexto determinado (Proyectos Productivos Agroindustriales).

En este taller se espera se puedan validar empíricamente algunas de las conclusiones del análisis de la producción de los estudiantes sobre esas situaciones y hacer una súper síntesis de esas conclusiones.

Referencias y bibliografía

- Arce, J. H., Torres, L.A., Ramírez, M. A., Valoyes, L.E., Malagón, M. R., & Arboleda, L. C. (sf). *Iniciación al álgebra escolar: situaciones funcionales, de generalización y modelación*. Cali: Universidad del Valle.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure*. Dordrecht: Reidel.
- Kieran, C. (1992). *El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar*. En D. Grouws (Ed.), *Manual de investigación sobre la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje* (pp. 390-419). Nueva York: Macmillan Publishing Company.
- Rico, L. (Coord.) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-74). Barcelona: Horsori.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

Anexo 1

Ficha de Reflexión 1

Situación 1: Preparación de la mezcla para el pandebono y la relación uno a uno entre magnitudes

1. Enuncie los aspectos relacionados con el concepto de función lineal que se movilizan en las tareas propuestas en la situación 1.
2. Indique procesos o desempeños del pensamiento variacional que se pueden movilizar en las tareas propuestas en la situación 1.
3. Escriba algunas observaciones sobre la pertinencia de estas tareas en el marco de las situaciones problemáticas de los proyectos productivos agroindustriales para el grado 9º (potencialidades o restricciones).

Ficha de Reflexión 2

Situación 2: Comercializando pandebonos y la función lineal

1. Enuncie los aspectos relacionados con el concepto de función lineal que se movilizan en las tareas propuestas en la situación 2.
2. Indique algunos procesos o desempeños del pensamiento variacional que se pueden movilizar en las tareas propuestas en la situación 2.
3. Escriba algunas observaciones sobre la pertinencia de estas tareas en el marco de las situaciones problemáticas de los proyectos productivos agroindustriales u otro tipo de proyectos (potencialidades o restricciones).
4. Desde su experiencia profesional o su formación, determine algunos elementos conceptuales y metodológicos que considera fundamentales al momento de introducir el concepto de función en la educación básica.