XIV CIAEM 2015
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Interamerican Conference on Mathematics Education
3-7 mayo
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México

Desarrollo del sentido numérico para la construcción del concepto de número real

Omar **Hernández** Rodríguez
Facultad de Educación, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
omar.hernandez4@upr.edu
Jorge M. **López** Fernández
Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
jorgemar.lopez@gmail.com
Ana Helvia**Quintero**
Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
aquinter_2000@yahoo.com

Resumen

Desde el surgimiento del concepto de “sentido numérico”, hace unos 25 años, los especialistas en educación matemática lo han estado estudiando. Sin embargo, y a pesar de los avances, al día de hoy no existen muchas herramientas eficaces para que los diseñadores de currículo y los maestros de nivel escolar puedan utilizar el sentido numérico para ayudar a sus estudiantes a construir el concepto de número real. En este taller se presenta una propuesta de taxonomía para el “sentido numérico” que permita el desarrollo de trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) para el concepto de número real y sus múltiples representaciones, especialmente aquellas asociadas a la recta numérica.

Palabras clave: sentido numérico, aprendizaje de los números reales, matemática realista.

Introducción

Los profesores de matemáticas de nivel universitario se quejan de que los estudiantes recién admitidos no tienen las herramientas necesarias para tener éxito en los cursos de primer año.En cuanto a los contenidos, señalan que muchos de sus alumnos tienen dificultades en el conocimiento de los sistemas numéricos, específicamente de su representación en la recta numérica, lo cual dificulta la comprensión de conceptos relacionados al cálculo.

El estudio de los números reales se inicia en la escuela elemental y se espera que esté completado para los primeros grados de escuela intermedia, posiblemente en el grado noveno.La experiencia como formadores de maestros, nos indica que muchos maestros de nivel elemental tienen deficiencias en los contenidos asociados a los números racionales en sus diversas representaciones (fracciones, decimales, porcentajes, entre otras). Estas deficiencias son transmitidas a sus estudiantes quines las van cargando a medida que pasan de grado y generalmente no son atendidas debido a lo cargado del currículo.

En este taller, empezaremos con un recuento histórico del origen del concepto “sentido numérico” que permitirá al lector conocer los primeros desarrollos y el camino que lo ha llevado a lo que es en la actualidad. Posteriormente haremos un análisis de algunas de las múltiples definiciones del sentido numérico que permitirá resaltar las características de los modelos que se deben utilizar para desarrollar el sentido numérico. Luego, propondremos una taxonomía para los modelos de desarrollo del “sentido numérico” que permita construir una definición de sentido numérico en su versión más amplia y a la vez sea útil para la creación de trayectorias hipotéticas de aprendizaje y actividades didácticas.

Finalmente, se presentará una THA que atiende los aspectos epistémicos y cognitivos asociados al conjunto de números reales.En su elaboración, se tuvieron en cuenta los aportes de Hans Freudenthal y de todo el equipo de trabajo que ha venido desarrollando un cuerpo teórico fundamentado en la investigación y que se ha denominado Matemática Realista.Se espera que con esto se que ayude a mitigar los problemas numéricos de los estudiantes al entrar a la universidad.

Antecedentes

El origen de la expresión “sentido numérico” se remonta a los años ochenta del siglo pasado. En esa época, el National Council of Teachers of Mathematics[1] (NCTM) estaba desarrollando los estándares de currículo y evaluación para la educación matemática escolar. Casi simultáneamente, a principios de 1989, la NationalScienceFoundation (NSF) organizó una conferencia sobre “sentido numérico” en el marco de la reunión anual de la American Eduacational Research Association (AERA) en San Diego, California.Uno de los propósitos de la reunión era establecer una definición para este concepto que emergía de las investigaciones sobre la estimación y el cómputo mental desarrolladas en la década de los ochenta.Además, como campo de estudio, se pretendían establecer las preguntas de investigación relacionadas al sentido numérico y los fundamentos teóricos para investigarlo (Sowder&Schapelle, 1989).Como era de esperarse, los participantes[2], reconocidos educadores matemáticos, sicólogos cognitivos y prestigiosos investigadores interesados en el tema, dedicaron gran parte del tiempo a definirlo.

En el proceso de concretizar el concepto de “sentido numérico”, los participantes se encontraron limitados por las dificultades impuestas por los supuestos teóricos y las prácticas de

[1] El NCTM es la asociación más grande de maestros de matemáticas.Fue fundado en 1920 y agrupa principalmente maestros de matemáticas de Estados Unidos y Canadá.
[2] Algunos de los participantes fueron Lauren B. Resnick, Sandra P. Marshall, James G. Greeno, Robbie Case, Robert E. Reys, Harold L. Schoen, Barbara J. Reys, Paul R. Trafton, Zvia Markovits, James Hiebert, Merlyn J. Behr, Thomas Carpenter y Edward A. Silver.

la época. La rigurosidad de las especificaciones para la elaboración de las pruebas estandarizadas es un ejemplo de ello.En el informe de la conferencia, los autores reconocieron que les resultó muy difícil definir una competencia matemática que contemplara múltiples facetas, incluso algunas de ellas de tipo intuitivo y que pudiera ser operacionalizada de tal forma que consiguieran ser evaluada por ítems de selección múltiple. Por otra parte, aún a pesar de los avances en cuanto a la representación de los conceptos matemáticos que permitía la teoría del procesamiento de información, resultaba casi imposible precisar representaciones para procesos intuitivos que escapaban del ámbito cognitivo.

Resnick (1989) en su resumen de la conferencia, reconoce la pluralidad del concepto al describir algunas de sus características:"… tiende a ser complejo, no es algorítmico, en su implantación pueden ser utilizados múltiples criterios, está sujeto a interpretaciones y juicios sutiles, está sujeto a la imposición de significado, requiere de la autorregulación del proceso de pensar". Aclara que a pesar de la dificultad de precisarlo, se puede evaluar pero no con los medios disponibles sino con el seguimiento individualizado de los estudiantes.

James Greeno (1991) precisa una definición de "sentido numérico" en el primer artículo publicado sobre el tema en el Journal for Research in Mathematics Education (Greeno, 1991). Las contribuciones más destacadas de la definición de Greeno son, por una parte, el reconocimiento de la necesidad de la construcción de modelos de los objetos numéricos, de sus características y las propiedades de las operaciones que se pueden realizar con ellos, y,por la otra, el establecimiento del sentido numérico como una actividad social determinada por el contexto en el que se desenvuelve el estudiante. Complementando esta visión con la institucionalización de los saberes, se puede reconocer la importancia que cobra el sentido numérico en los distintos ámbitos de formación estudiantil.En esto han sido más protagónicos los investigadores de la educación matemática de escuela elemental, quizá influenciados por la definición de sentido numérico que estableció el NCTM en sus estándares de 1989,en los que se describen cinco componentes: desarrollo del significado de los números, exploración de relaciones numéricas con manipulativos, entendimiento de las relaciones de magnitud de los números, desarrollo intuitivo del efecto de las operaciones en los números y desarrollo de referentes para la medición de objetos y situaciones comunes (NCTM, 1989). Estas competencias generalmente se desarrollan en los primeros niveles de educación y es así como el sentido numérico es asociado principalmente a la escuela elemental. Esta visión es posteriormente refrendada en la definición de sentido numérico en los estándares del 2000: "habilidad para descomponer números naturalmente, uso de números particulares como 100 o ½ como referentes, uso de las relaciones entre las operaciones aritméticas para resolver problemas, entender el sistema numérico de base diez, estimar, tener sentido de los números y reconocer la magnitud relativa de los números" (NCTM, 2000).

Definición de sentido numérico

Es imperativo resaltar el carácter multidimensional del sentido numérico y su importancia para la formación matemática de los estudiantes de todos los niveles.Es posible que la definición de la NCTM haya centrado su atención en actividades que se desarrollan en los grados primarios, sin embargo, son muchos los investigadores que han dado sus definiciones atendiendo la proyección del "sentido numérico" a grados superiores y a otras áreas de las matemáticas.

Un análisis de varias definiciones nos permitió concluir que se distinguen cuatro niveles: conocimiento, aplicación, evaluación e invención (Aguilar, Navarro, Alcalde, & Marchena,2005;

Berch, 2005; Bruno Castañeda, 2000; Case, 1998; Ministerio Nacional de Colombia, 1998). En el primer nivel, las acepciones de sentido numérico enfatizan en la importancia de conocer los números, las características de la base diez, sus propiedades, la magnitud relativa de los números, entre otros aspectos característicos de los números. Este conocimiento cobra importancia cuando se le concede un fin utilitario, generalmente para hacer cálculos o resolver problemas, en fin, de la aplicación de los números en diferentes ámbitos. La definición del NCTM indica algunas estrategias que pueden ser efectivas para resolver problemas: utilizar números particulares como referentes,usar las relaciones entre las operaciones aritméticas o establecer la magnitud relativa de los números (NCTM, 2000).

Otros autores le asignan importancia a la capacidad intuitiva de evaluar actividades numéricas como por ejemplo apreciar diversos niveles de exactitud al manejar los números, localizar errores aritmético, producir estimaciones razonables, saber elegir el procedimiento de cálculo más eficiente o reconocer modelos numéricos más sofisticados que otros (Bruno, 2000). En todas estas es evidente la capacidad del estudiante de justipreciar el proceso realizado.

En la serie de lineamientos curriculares del Ministerio Nacional de Colombia se establece que el sentido numérico supone una comprensión profunda del sistema de numeración decimal, no sólo para tener una idea de cantidad, de orden, de magnitud, de aproximación, de estimación y de las relaciones entre ellos, sino además para desarrollar estrategias propias de la resolución de problemas. De esta manera se le asigna importancia al conocimiento declarativo y procesal para establecer nuevos procedimientos que lleven a la solución de los problemas numéricos que se le plantean al estudiante.

Es importante anotar que el sentido numérico requiere de la comprensión de los distintos significados de los objetos numéricos, de las relaciones entre ellos y delas operaciones en diversos contextos.Estos objetos suelen ser sencillos a niveles escolares elementales pero se van volviendo más complejos a medida que se avanza en los contenidos.Por ejemplo, existe una diferencia en complejidad en la modelación de losnúmeros enteros en comparación con los números racionales. Para el desarrollo del pensamiento numérico se requiere del apoyo de sistemas matemáticos más allá de los numéricos como el geométrico, el métrico y el de datos (Ministerio de Educación de Colombia).

Berch (2005), al igual que Greeno, reconoce en su definición de sentido numérico la importancia de usar métodos para comunicar, procesar e interpretar información numérica.En el aspecto didáctico, es indudable el valor del desarrollo de modelos que permitan a los estudiantes transitar por el intrincado camino de los sistemas numéricos.En esto, los investigadores del Instituto Freudenthal han sido muy productivos.

Aportes de la Matemática Realista

Hans Freudenthal (1983) menciona las prácticas “anti-didácticas” de quienes, una vez resuelto un problema matemático, invierten su proceso lógico de solución, convirtiendo definiciones en proposiciones y proposiciones en definiciones, transformando así“la invención cálida de la matemática en una belleza álgida". Esta crítica es cónsona con su *principio de re-invención*, el cual afirma la necesidad del estudiante de *re-inventar* la matemática (con la ayuda de sus maestros) para poder llegar a comprenderla (Freudenthal, 1973). Claro está, es de esperar encontrar dificultades en el aprendizaje cuando se estudian sistemas matemáticos lógico-deductivos en los que se ocultan las motivaciones y las ideas seminales que les dieron origen y que generaron la cognición correspondiente. Freudenthal fue partidario del estudio de la evolución histórica de las estructuras matemáticas con el fin de forjar propuestas didácticas para fortalecer el proceso de re-invención.

En su monumental obra *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures de 1983,* Freudenthal aplica su método fenomenológico a la enseñanza de áreas específicas de la matemática, comenzando con el ejemplo de la fenomenología didáctica de la noción de longitud (la cual, como veremos, lleva al modelo de la recta métrica) e incluyendo áreas matemáticas de estudio como lo son los enteros, las fracciones, las razones y las proporciones, la geometría, el lenguaje algebraico y las funciones. Además, en su obra de 1973, *Mathematics as an Educational Task*, Freudenthal propone fenomenologías didácticas para el estudio del concepto de número y de áreas matemáticas como los son las de conjuntos y funciones, la geometría, el análisis matemático, la probabilidad, la estadística y la lógica.

En la práctica didáctica, el principio de re-invención se hace realidad mediante el uso de *modelos* que sirven para incorporar los procesos en la estructura mental de la persona que construye el conocimiento matemático y que constituyen el objeto de estudio. Los modelos son representaciones de las situaciones en donde se reflejan aspectos esenciales de los conceptos, relaciones y procesos matemáticos.Además,ayudan a constituir las ideas integradoras de la matemática que sirven de vehículo para entender la abstracción. Nos apresuramos a apuntar que los modelos que se emplean para representar tales procesos en la matemática y en su didáctica tienen que estar necesariamente atemperados a las ventajas didácticas que puedan significar para el desarrollo de los conceptos, relaciones o procesos en las etapas de desarrollo matemático del estudiante.

También, es menester señalar la importancia de la semiótica en el estudio del desarrollo de los símbolos matemáticos que representan los procesos y los significados característicos del pensar matemático. Por consiguiente los modelos que consolidan el conocimiento matemático tienen ventajas didácticas variables de acuerdo a la etapa cognoscitiva del aprendizaje matemático del estudiante. Así como algunas etapas del desarrollo matemático surgieron en momentos relativamente tardíos del desarrollo del conocimiento matemático, así también las ideas integradoras de la didáctica de la matemática se deben utilizar de acuerdo al nivel de desarrollo cognoscitivo del estudiante y con atención a las ventajas didácticas que tales modelos pudieran suponer en el contexto del desarrollo matemático del alumno.

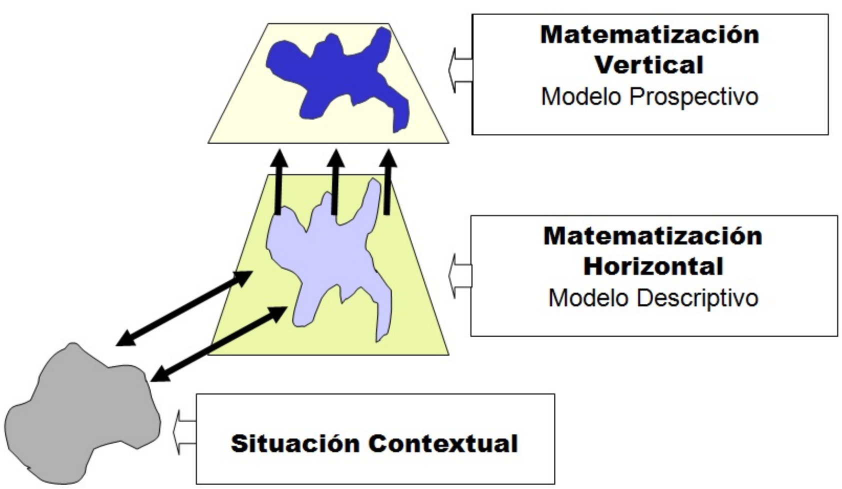

Figura 1. Matematización horizontal y vertical.

En la Figura 1 hemos representado un esquemático que ilustra el funcionamiento de los modelos en la educación matemática. Típicamente, el estudiante es expuesto a un problema matemático de tipo contextual, es decir, un problema que surge de los contextos que le son accesibles. Luego, se vale de un modelo, de su propia producción o de producción en grupos de cooperación con otros estudiantes y el maestro. En el diagrama, a este primer modelo se ha llamado *modelo descriptivo*, ya que su propósito es facilitar la comprensión de la situación propuesta. En esta etapa, el modelo no es sino un elemento simplificador para manejar mejor los datos y las operaciones del problema propuesto. Sin embargo, el análisis del modelo propiamente dicho, con frecuencia, sugiere alternativas de exploración que terminan convirtiéndose en conocimiento matemático nuevo. Este proceso de generación de un *modelo prospectivo* se conoce como el proceso de matematización vertical. El modelo prospectivo sugiere problemas nuevos y, por ende, conocimiento nuevo.

Propuesta de una taxonomía para el sentido numérico

En el diccionario de la Real Academia Española aparece definida la palabra taxonomía como la ciencia que trata de los principios, métodos y fines de la clasificación o sencillamente la acción o el efecto de clasificar (DRAE, 2001).Una taxonomía es una regla de ordenamiento o una clasificación. En esta sección proponemos una clasificación de los temas del currículo matemático cuyo estudio da origen al tipo de conocimiento matemático que se toma como evidencia del sentido numérico. Como ocurre con todas las taxonomías, la organización temática implícita en nuestra propuesta facilita la organización de una discusión coherente sobre lo que constituyen las evidencias que dan fe del desarrollo de las acciones que se toman como indicativas de eso que se describe como "sentido numérico". En nuestro caso, como se verá, se propone una taxonomía que contiene un ordenamiento específico sobre la naturaleza del estudio de los números y sus operaciones en la matemática escolar. Proponemos, así, una taxonomía que clasifica los procesos matemáticos que tomamos como indicadores del sentido numérico de acuerdo a si tales procesos se refieren a:

1. las propiedades algebraicas de los sistemas numéricos;
2. las propiedades geométricas de los sistemas numéricos que se emplean para medir, y las propiedades geométricas del plano que sirven para describir relaciones numéricas que involucran relaciones, funciones y gráficas en general;
3. las propiedades de los números que se relacionan a la forma en que uno los cuenta y los clasifica (aspectos ``combinatorios"), y
4. a los aspectos formales asociados a la manera en que escribimos y empleamos protocolos para designar y dar nombres y representaciones a los números.

Desde luego, lo más que interesa en nuestra discusión no es la taxonomía propiamente dicha, sino, más bien, los procesos cognitivos que se generan en torno a ella y que se toman como evidencia fehaciente de eso que constituye el sentido numérico. La identificación de tales procesos es, a fin de cuentas, lo más importante para identificar formas de medir el sentido numérico ya que supone la identificación de los procesos matemáticos que se asocian a la comprensión de los números y sus aplicaciones. Veremos múltiples ejemplos de cómo la taxonomía propuesta sirve de marco para la discusión de los procesos matemáticos que asociamos al sentido numérico. Por ejemplo, la habilidad de un estudiante para la estimación de los resultados que se obtienen de la ejecución de varias operaciones numéricas sin necesidad de realizarlas en detalle se toma como indicativo de la adquisición de niveles significativos de su sentido numérico. Sin embargo, la "estimación" no figura como elemento de la taxonomía propuesta, ya que depende de la comprensión que se tenga de relaciones entre los números que pertenecen a categorías específicas del estudio de los números que se formulan explícitamente en nuestra taxonomía, en este caso, a la representación decimal de los números y a la estimación de tales números a base de sus dígitos decimales. Así pues, la taxonomía sobre sentido numérico propuesta en este escrito no es ni más ni menos que un marco de referencia conveniente para organizar la discusión de los procesos matemáticos que pasan a constituir el acervo de conocimiento que se describe mediante la frase “sentido numérico”.

Para atender los asuntos sociales y culturales, reconocemos que el maestro debe estar muy atento al conocimiento que traen a la escuela los niñosdesde su casa y que muestra el influjo social en la construcción del conocimiento. Godino y sus colaboradores lo denominan sistema de prácticas operativas y discursivas, concepto que trata de describir el conocimiento informal que posee el estudiante y que demuestra a través de sus acciones y del lenguaje que utiliza para comunicar sus nociones rudimentarias de los números (Godino, Font, Wilelmi, & Arreche, 2009). Aprovechando ese bagaje cultural asociado a los números, el maestro debe continuar presentando actividades que ayuden al estudiante a construir el conocimiento matemático que ciertamente se inicia con la sucesión de contar, la cual los niños traen a la escuela de sus hogares. De esta sucesión de enteros surgen las operaciones numéricas como estrategias de contar.

A continuación, presentamos una taxonomía sobre los aspectos que, a nuestro juicio, se deben considerar en la definición y la medición del sentido numérico. Esta taxonomía puede ser útil, por una parte, para comprender el conjunto de números reales y, por la otra, para elaborar trayectorias de aprendizaje y actividades didácticas que capitalicen de las descripciones de las características utilizadas para elaborar la clasificación que se propone .En su elaboración, se tuvieron en cuenta los aportes de Hans Freudenthal y todo el equipo de trabajo que ha venido desarrollando un cuerpo teórico fundamentado en la investigación y que se ha denominado Matemáticas Realista.

1. Razonamiento algebraico en los sistemas numéricos
    a. Nociones informales de los números: sucesión de contar, números de referencia, la “numerosidad” (o la cardinalidad) de colecciones de objetos, los números para medir
    b. Rectas vacías en la resolución de problemas aritméticos
    c. Transición de la aritmética al álgebra
    d. Estrategias de contar como antesala de principios algebraicos
    e. Transición de la observación de patrones a fórmulas y ecuaciones
    f. Álgebra del nivel intermedio y superior
2. Razonamiento geométrico en los sistemas numéricos
    a. Primera parte: geometría de la recta numérica
        i. Geometría implícita en el ordenamiento y la distancia de la recta numérica
        ii. Razonamiento proporcional
            1. Tablas de proporciones
            2. Por cientos
            3. Decimales
            4. Fracciones
            5. Rectas dobles
        iii. Representación decimal de los números reales
            1. Ubicación de los números en la recta numérica
            2. Densidad de los decimales en la recta

3. Densidad de los números racionales en la recta
4. Números irracionales

b. Segunda parte: la geometría del plano
   i. Razonamiento variacional
      1. Relaciones, funciones y gráficas
      2. Gráficas para la representación de relaciones numéricas
      3. Traslaciones, contracciones, periodicidad y simetrías de gráficas
      3. Razonamiento combinatorio
      4. Razonamiento numérico formal
         i. Convenciones sobre las representaciones numéricas: notación decimal
         ii. La asignación de nombres a los números
         iii. La idea de cardinalidad y la insuficiencia de los alfabetos finitos para la designación de los números

Modelos para la construcción del concepto de número real

Un componente importante de esta estructura conceptual de número real es la línea recta vacía, que utilizada apropiadamente puede ayudar a comprender la magnitud de los números y a desarrollar estrategias para el cómputo de las operaciones.La recta vacía se va desarrollando desde una sarta de cuentas, pasando por una recta algebraica que permite desarrollar estrategias de contar y hacer operaciones, para convertirse en una recta métrica que permite establecer otras propiedades de los números y que también permite comprender propiedades de los intervalos de números para afianzar propiedades de orden y de densidad de los números.Posteriormente, los modelos de recta se convierten en rectas dobles que permitirá el desarrollo del pensamiento proporcional y el estudio de los decimales y los porcentajes.

A continuación se presenta una serie de modelos que van ilustrando una posible THA para el desarrollo del concepto de número real.

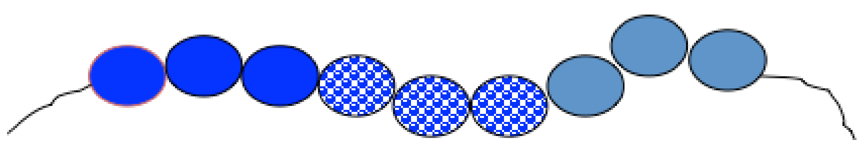

Figura 2. Primeros pasos en el desarrollo del sentido numérico: sarta de cuentas.

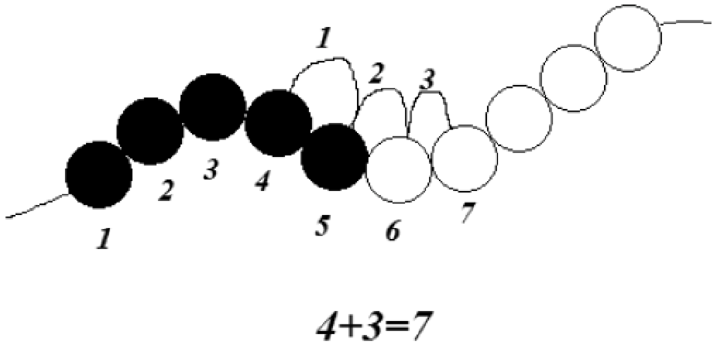

Figura 3. Uso de la sarta de cuentas para sumar.

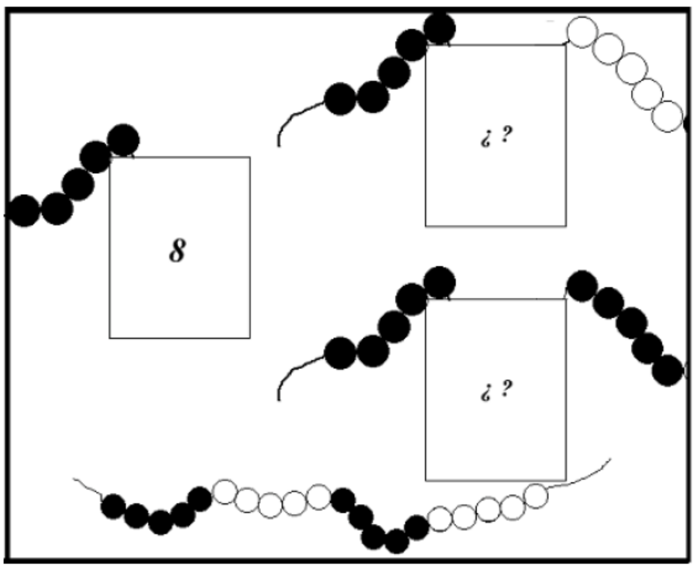

Figura 4. Desarrollo de la intuición con sarta de cuentas.

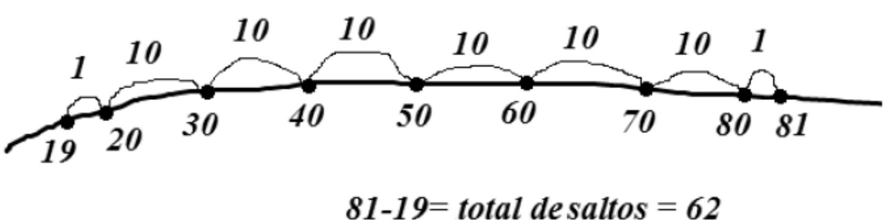

Figura 5. Saltos en la recta vacía para resolver problemas de substracción.

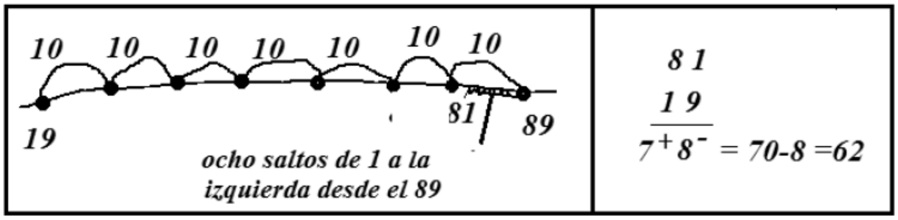

Figura 6. Saltos en la recta y un nuevo algoritmo para la substracción.

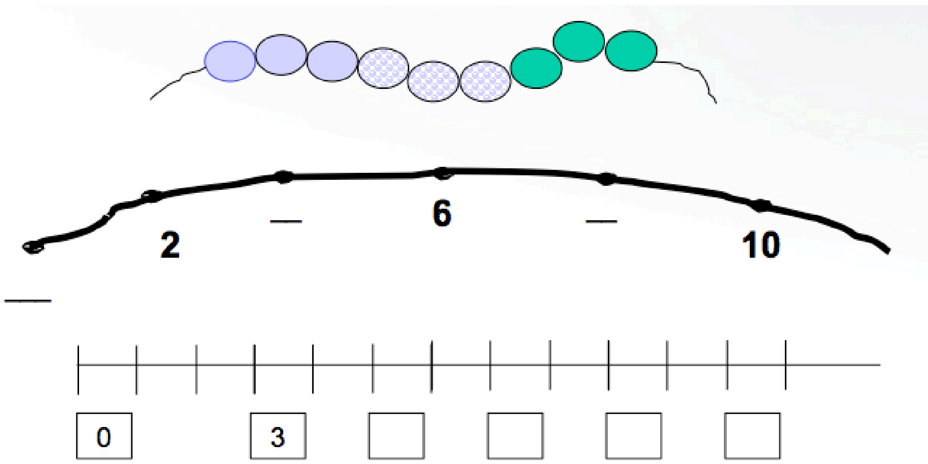

Figura 7. Sartas de cuentas y la recta métrica.

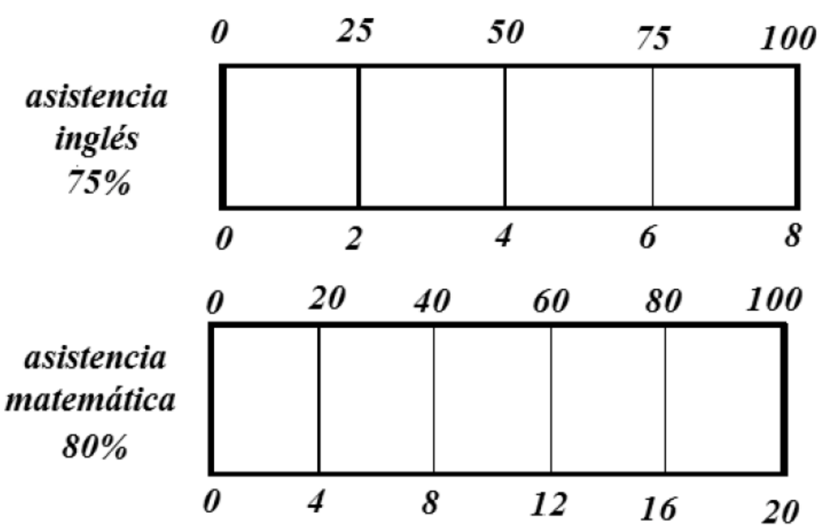

Figura 8. Rectas dobles para resolver problemas de porcentajes.

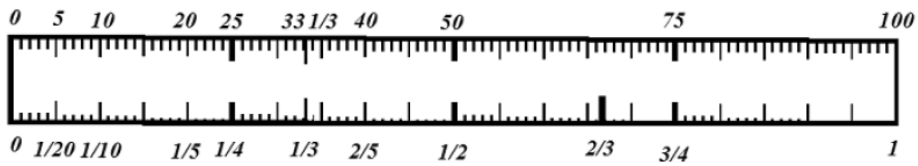

Figura 9. Rectas dobles para modelar la relación entre porcentajes y fracciones.

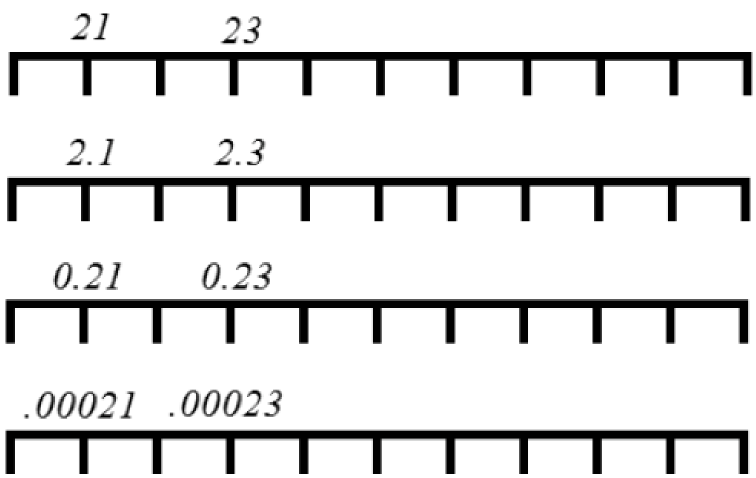

Figura 10. Uso de escalas para modelas la densidad de los números decimales.

Una vez el estudiante pueda ubicar un número decimal en la recta numérica, esté familiarizado con el orden de los números decimales, pueda convertir una fracción en decimal[3], y se convenza de la posibilidad de la existencia de otro tipo de números que admiten expansiones decimales infinitas no periódicas, está cerca de comprender los números reales. Claro está que llenar ese vacío es un poco complicado porque hace falta la propiedad de completitud.Propondremos que la propiedad de completitud de los números reales es equivalente a indicar que toda expansión decimal (finita o infinita) representa, en efecto, un número real.Sin embargo, para hacer la demostración se necesita el concepto de límite, que no es central en la mayoría de currículos escolares, lo cual impide que se formalice el concepto de número real en este nivel.

Presentamos a continuación una alternativa que permite que los estudiantes de nivel escolar se familiaricen con las ideas matemáticas que son necesarias para completar el concepto de número real.Supondremos que los números reales satisfacen todas las propiedades algebraicas de los números racionales y que también satisfacen las siguientes dos propiedades adicionales[4]:

---

[3]El algoritmo que generalmente se discute en la escuela es el de división larga y con esto el estudiante se convence que toda fracción se puede escribir como un decimal finito o infinito periódico.

[4]La forma clásica de enunciar estas propiedades son las siguientes. Para la Propiedad Arquimediana: Si a, b son números reales con $a > 0$, entonces, existe un entero n, tal que, $na > b$. Para el Principio de Completitud: Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente, tiene una cota superior mínima. Claro, estas aseveraciones son equivalentes a las nuestras. Los números racionales satisfacen el PropiedadArquimediana pero no el Principio de completitud. Nuestras aseveraciones se dan en el marco de un cuerpo ordenado.

Propiedad Arquimediana: Para todo número real$x$, si $|x| \leq 1/10^n$para todo entero$n \geq 1$, entonces $x = 0$.

Principio de Completitud: Para todo número real $x \geq 0$ existe un entero $N \geq 0$ y una sucesión de dígitos (es decir, números del 0al 9, ambos inclusive) $d_1, d_2, \dots, d_n$, ..., tal que, para cada entero$n \geq 1$,

(1) y$N + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} \leq x \leq N + \frac{d_1}{10} + \cdots \frac{d_n}{10^1} + \frac{1}{10^n}$

En este caso decimos que $N+.d_1 d_2 \dots d_n$ ... es una *representación decimal* del número real x. Decimos, además, que esta representación decimal es *finita* si para algún índice n_0, tenemos$d_k = 0$, para todo$k \geq n_0$, es decir, si la expansión sólo tiene un número finito de dígitos distintos de cero. Si una representación decimal de un número real no es finita, decimos que es *infinita*. Esto último, significa que para todo índice n, existe algún índice k, tal que, $k > n$ y$d_k \neq 0$.

Observamos de inmediato que si x, y son dos números reales no negativos con la misma expansión decimal, $N+.d_1 d_2 \dots d_n$ ..., entonces la relación (1) dice que los números x y $y$pertenecen ambos al intervalo definido por los extremos de la desigualdad y, por tanto, la distancia entre x y y no es mayor que la longitud de tal intervalo, es decir,$|x - y| < 1/10^n$. Como esto es válido para todo entero positivo$n$, por la Propiedad Arquimediana, tenemos que $|x - y| = 0$, es decir, $x = y$.

Por otro lado, hay números reales que tienen más de una expansión decimal. En efecto si$x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$son dígitos con $x_{n_0} \neq 0$ y $x = N + x_1/10 + \cdots + x_{n_0}/10^n$, entonces, se puede demostrar que $x$también tiene la expansión decimal $x = N + y_1/10 + \cdots + y_{n_0}/10^n$ ...donde $y_k = x_k$ para $1 \leq k \leq n_0 - 1$, $y_{n_0} = x_{n_0} - 1$y$y_k = 9$para todo $K > n_0$.Esto sigue directamente de la relación (1) para N y los dígitos y_k recién definidos. El lector interesado puede verificar que si$x = 1$, entonces, $N = 1$y $d_n = 0$ para todo $n \geq 1$es una expansión decimal de 1ya que satisface (1). De igual forma, la expansión $N = 0$ y $d_n = 9$, para todo$n \geq 1$, también satisface (1). En efecto, se puede demostrar que un número real puede tener, a lo sumo, dos expansiones decimales distintas[5], las cuales son, típicamente, muy parecidas a las de los ejemplos que hemos dado. Otros ejemplos son 2.34211 y $2.34210\overline{9}$ o 0.03 y $0.02\overline{9}$, etc. En efecto, los únicos números reales que pueden tener dos representaciones decimales distintas son las llamadas fracciones decimales, es decir, los números reales de la forma$N + d_1/10 + \cdots + d_n/10^n$para algún entero $N \geq 0$y algún entero $n \geq 1$.

De la relación (1) se aprecia que hay un límite implícito en las aproximaciones decimales de los números reales cuando éstas son infinitas. En efecto, si es un número real con expansión decimal infinita $N+.d_1 d_2 \dots d_n$ ...entonces para cada$n \geq 1$, existe algún número real $\theta_n$con$0 \leq \theta_n \leq 1$, tal que$N + d_1/10 + \cdots + d_n/10^n + \theta_n/10^n$y tenemos

$$x = \lim_{n \to \infty} \left(N+.d_1 d_2 \dots d_n + \frac{\theta_n}{10^n} \right)$$

[5]Si en (1) se toma la desigualdad de la derecha como estricta, entonces, de acuerdo a la definición que resulta, no habría decimales infinitos que terminen con un número infinito de nueves, ya que tales expansiones no satisfacen la versión revisada propuesta del Principio de Completitud.

(2)$= \lim_{n\to\infty} (N + .d_1 d_2 \ldots d_n)$

ya que, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\theta_n}{10^n}\right) = 0$. La relación (2) dice que todos los números reales son límites de decimales finitos o límites de fracciones.

Referencias

Aguilar, M., Navarro, J. I., Alcalde, C., & Marchena, E. (2005). El constructo “conciencia numérica”. Su importancia en la detección y prevención de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas. *Tavira: Revista de Ciencias de la Educación, 21*, 55-78.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 333-345. doi: 10.1177/00222194050380040901.

Bruno Castañeda, A. (2000). Sentido numérico. *Números 43-44*, 267-270.

Case, R. (1998, April). *A psychological model of number sense and its development*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego

Gersten, R., & Chard, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *Journal of Special Education, 33*(1), 18-28.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education 22*(3), 170-218.

Ministerior Nacional de Colombia. (1998). *Serie lineamientos curriculares*. Bogotá, D.C., Colombia: Autor.

Resnick, L. B. (1989). Defining, Assessing, and Teaching Number Sense. In J. T. Sowder & B. P. Schapelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a Conference* (pp. 35-39). ERIC document ED317413.

Sowder, J. T., &Schapelle, B. P. (1989). *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a Conference*. ERIC documentED317413.