



Uso de carta histórica para abordagem da Teoria de Grafos no Ensino Médio

Lauro Chagas e Sá
Instituto Federal do Espírito Santo
Brasil

lauro.sa@ifes.edu.br

Sandra Aparecida Fraga da Silva
Instituto Federal do Espírito Santo
Brasil

sfraga@ifes.edu.br

Resumo

Apresentamos, neste trabalho, uma abordagem inicial da Teoria de Grafos em duas turmas de segundo ano de Ensino Médio. Propomos, por meio de carta, a resolução de um desafio que adapta o Problema das Sete Pontes de Königsberg (1736) à disposição geográfica da Grande Vitória (Espírito Santo, Brasil). Nosso objetivo é analisar respostas dos alunos à carta das Pontes de Vitória, de modo a estabelecer relações entre estratégias de resolução de alunos e o do matemático Leonard Euler. Além da carta, foi utilizado um material didático próprio, elaborado à luz da Teoria do Jogo de Vozes e Ecos, de Paolo Boero e seu grupo. A partir da aplicação desse material, identificamos ecos produzidos por alunos durante a resolução das atividades propostas e apresentamos algumas contribuições do uso da História da Matemática em sala de aula.

Palavras chave: Educação Matemática, Matemática Discreta, Ensino Médio, Teoria de Grafos, História da Matemática.

Introdução

No Ensino Médio brasileiro, percebe-se que a Matemática Discreta tem se reduzido ao estudo de análise combinatória e probabilidade. Dessa forma, a inclusão dos Grafos no Ensino Médio permite a ampliação de discussões sobre os tópicos deste campo da matemática. Alguns aspectos normativos reforçam as potencialidades de se abordar a Matemática Discreta e a Teoria

dos Grafos no Ensino Médio em sala de aula. As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais defendem que “estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa [...] enfrentar problemas de diferentes naturezas” (Brasil, 2002, p. 9). Nesse sentido, estudar elementos da Matemática Discreta pode significar diversificação da Matemática para além dos elementos algébricos, tão marcantes em estudantes da Escola Básica. É importante destacar que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio sugerem discussão do uso de problema da Teoria dos Grafos no Ensino Médio:

No Ensino Médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo dos problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola - são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler (Brasil, 2006, p. 94).

Na esfera estadual, o Currículo Básico da Escola Estadual do Espírito Santo prevê a “introdução à Teoria dos Grafos” (Espírito Santo, 2009, p. 120) para o segundo ano do Ensino Médio e “resolução de problemas utilizando grafos” (Espírito Santo, 2009, p. 122) para o terceiro ano. Além da justificativa da pesquisa em um caráter normativo, também foi nosso interesse conhecer as reais demandas de professores de matemática do Espírito Santo. Durante a fase inicial da pesquisa, tivemos a oportunidade de consultar noventa e quatro docentes para saber quais eram as demandas em relação à Teoria dos Grafos. Os resultados mostram que setenta e dois professores (76,59%) nunca estudaram Teoria de Grafos, oitenta e dois professores (87,23%) nunca trabalharam esse conteúdo em suas aulas e quarenta e nove professores (52,13%) sequer sabiam de sua presença no currículo. Podemos dizer, como Malta (2008, p.11), que “a Teoria dos Grafos apresenta aspectos pertinentes que merecem espaço no currículo da Escola Básica”. Contudo, para que essa abordagem possa ser efetivada de forma adequada no Ensino Médio, é importante que os professores tenham conhecimento específico e pedagógico acerca do tema em questão.

Em face da necessidade de se buscar alternativas metodológicas para auxiliar o professor na abordagem da Teoria dos Grafos no Ensino Médio, nosso trabalho investigou contribuições da História da Matemática no ensino deste tópico (Sá, 2014). Dessa forma, nosso objetivo da pesquisa citada foi identificar algumas das contribuições da História da Teoria de Grafos na abordagem inicial deste tema em uma turma de segundo ano de Ensino Médio. Para este trabalho, procuramos estabelecer relações entre estratégias de resolução de alunos e o do matemático Leonard Euler, que criou a Teoria dos Grafos.

Fundamentação teórica

Acreditamos que a História da Matemática é uma rica fonte de experiências e produções humanas, que oportuniza um diálogo entre práticas atuais e fontes históricas, conforme previsto nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos e de conhecimento que vão entrar na relação didática (Brasil, 2006, p. 86).

Uma reflexão sobre a utilização da História na Educação Matemática nos conduz a uma escolha teórica. Os pontos de vista são variados e dependem da visão que cada professor e pesquisador têm da História e dos valores que estão presentes nesta metodologia. A primeira categorização referente ao uso de História da Matemática apresentada neste trabalho é proposta por Miguel e Miorim (2011). Estes autores organizam as investigações em: perspectiva evolucionista linear, perspectiva estrutural-constructivista operatória, perspectiva evolucionista descontínua, perspectiva sociocultural e perspectiva do Jogo de Vozes e Ecos. A perspectiva evolucionista linear recorre à História para identificar a ordem cronológica que os tópicos matemáticos surgiram e que, conseqüentemente, deverão ser ensinados. A perspectiva estrutural-constructivista operatória busca, na História, conflitos cognitivos que permitam a passagem de uma etapa de construção do pensamento para outra. Essa linha de pesquisa defende que os mecanismos de passagem de um período histórico são análogos aos da passagem de um estágio genético aos seus sucessores (Piaget & Garcia, 1987). Segundo a perspectiva evolucionista descontínua, a História permite reconhecer obstáculos epistemológicos e construir situações problemas para superá-los. Baseada nas ideias de Vygostky, a perspectiva sociocultural enxerga a História da Matemática como uma fonte de experiências humanas que podem ser trabalhadas em atividades didáticas de Matemática. Também comungando das ideias vygostkianas, a perspectiva dos Jogos de Vozes e Ecos (Boero, Pedemonte & Robotti, 1997) busca na História da Matemática relações “entre as vozes históricas produzidas na sistematização do discurso teórico da Matemática e as vozes dos estudantes” (Motta, 2006, p. 17).

A classificação que Motta (2006) faz em relação ao uso da História na Educação Matemática, a segunda a ser estudada, é influenciada pelas perspectivas levantadas por Miguel e Miorim (2011). Nesse sentido, a autora defende que as perspectivas evolucionista linear, estrutural-constructivista operatória e evolucionista descontínua constituem a imagem da História da Matemática como “espelho” enquanto as perspectivas sociocultural e do Jogo de Vozes e Ecos constituem a imagem como “pinturas”. Essa divisão entre as perspectivas decorre da diferenciação entre

[...] as que adotam um ponto de vista internalista e indutivista e que apresentam a Matemática como uma ciência pronta e acabada e aquelas que adotam uma visão externalista e sociocultural e buscam compreender o conhecimento matemático como uma manifestação significativa das diversas culturas (Motta, 2006, p. 18).

Em uma terceira categorização referente ao uso de História da Matemática, Dynnikov e Sad (2007) apresentam três opções para o emprego de fontes históricas em sala de aula: de modo factual, de modo processual e como fonte de significado. No primeiro caso, a História da Matemática é utilizada para dar mais veracidade, por meio de nomes, imagens e registros. Assim, essa metodologia se apresenta de modo ilustrativo e estático, na qual a única incumbência do professor é escolher o material e preparar a exposição. A segunda forma, mais dinâmica, percebe as fontes históricas como instrumentos que auxiliam no ensino de Matemática, pois permitem que o aluno conheça o processo realizado por um Matemático para a resolução de um problema. Nesse caso, ainda não há uma transposição da história para o contexto escolar e o papel professor é mediar e auxiliar nos registros. No terceiro modo de se utilizar de História em sala de aula, o papel das fontes históricas é produzir significados em meio às próprias experiências dos alunos, proporcionando, principalmente, uma ampliação da maneira com que eles entendem e lidam com a Matemática. Nesse caso, o professor precisa intensificar o dinamismo e os ecos produzidos pela voz dos autores nos alunos.

Ao longo das atividades realizadas em sala de aula realizada, nossa prática foi orientada pela Teoria do Jogo de Vozes e Ecos, elemento comum entre as perspectivas sociocultural e do jogo de Vozes de Miguel e Miorim (2011), a concepção de pintura de Motta (2006) e o terceiro modo de utilizar a história, de Dynnikov e Sad (2007).

Pressupostos metodológicos

Como pretendíamos abordar a história da Teoria dos Grafos e algumas de suas contribuições na abordagem inicial deste tema em sala de aula de uma turma de segundo ano de Ensino Médio, foi preciso desenvolver uma pesquisa qualitativa com duas frentes de trabalho: uma pesquisa histórico-bibliográfica e outra de prática de sala de aula. As atividades deste estudo iniciaram em abril de 2012 e foram realizadas até janeiro de 2014. Nos primeiros meses, nossa investigação foi realizada por meio da pesquisa de iniciação científica intitulada “Teoria dos Grafos em atividades didáticas desenvolvidas no laboratório de Matemática para o Ensino Médio”¹, pela qual realizamos buscas por pesquisas que discutem a Teoria dos Grafos de acordo com várias tendências de Educação Matemática, como Resolução de Problemas, História da Matemática, Uso de Material Manipulativo e Modelagem Matemática. Os arquivos encontrados foram fichados, discutidos e retomados durante o planejamento de atividades e durante a escrita de trabalhos relacionados a cada tema em questão. Das tendências utilizadas, História da Matemática foi a escolhida para nortear essa pesquisa por atender aos objetivos propostos. Assim, realizamos um novo estudo bibliográfico, buscando elementos da história da Teoria dos Grafos, uma vez que o aspecto metodológico já havia sido delineado, inicialmente, com a leitura de Miguel (1997), Miguel e Miorim (2011) e Mendes (2009).

Um dos principais resultados pedagógicos do levantamento histórico diz respeito ao Problema das seis Pontes de Vitória. Durante a realização de um estudo piloto, percebemos as potencialidades desse problema para a abordagem de Teoria dos Grafos no Ensino Médio. Nesse sentido, realizamos uma “adaptação pedagógica” (Mendes, 2009, p. 109), adequando o problema das pontes da capital capixaba à carta recebida por Euler.

No século XVIII, Leonhard Euler (1707 – 1783) era o principal matemático da Academia de Ciências de São Petersburgo. Após tomar conhecimento da notoriedade de Euler, em 1736, o prefeito de uma cidade próxima a Königsberg enviou uma carta a Euler em nome de Heinrich Kiihn, um professor de matemática local. As mensagens trocadas inicialmente não foram recuperadas, mas uma carta datada de 09 de março indica que eles haviam discutido o problema. Assim, na atividade entregue para os alunos, substituímos o nome do prefeito pelo do pesquisador e o nome do professor Kihn pelo da professora orientadora (para o estudo piloto) ou pelo da professora regente da classe (na aplicação em sala de aula). A carta tem o papel de incentivar o empirismo e o raciocínio dedutivo, que são estratégias defendidas pelo Jogo de Vozes e de Ecos.

Preparamos duas outras atividades didáticas, que poderiam ser realizadas individualmente ou em duplas, a partir do planejamento realizado com a professora regente da turma. Ao elaborar atividades didáticas que fizessem uso de história da Teoria dos Grafos, procuramos retomar as ideias da Teoria do Jogo de Vozes e Ecos. Por isso, elaboramos um material que apresenta o que

¹Esta pesquisa foi financiada pelo Fundo de Apoio à Ciência e Tecnologia do Município de Vitória (Facitec).

se acredita ser a estratégia adotada por Euler (1851) para resolver o Problema das Sete Pontes de Königsberg. Entretanto, para tornar o processo da sala de aula mais dinâmico, não apresentamos diretamente o modelo formulado pelo matemático suíço. Transformamos as estratégias de Euler em dicas para os alunos, deixando que eles elaborassem os diagramas e fizessem a contagem dos graus dos vértices, até chegar no Teorema da Existência de Caminhos Eulerianos. Optamos, o pesquisador, a orientadora e a professora regente, em entregar a carta como tarefa de casa, realizar a atividade da história em duas aulas (uma para resolução e outra para discussão) e reservar uma aula para a atividade avaliativa. Destacamos que, neste texto, voltamos nossos olhares para o primeiro momento da sequência, pois objetivamos estabelecer relações entre estratégias de resolução de alunos e o do matemático Leonard Euler.

Implicações em sala de aula

No dia da entrega das cartas, ocasionalmente, não pudemos acompanhar a aula de matemática nas turmas de segundo ano. Dessa forma, as cartas foram entregues à professora regente para que ela repassasse aos seus alunos. Com as cartas produzidas, esperávamos que pelo menos um aluno apresentasse ideias presentes no Teorema da Existência do Caminho Euleriano para que esta carta fosse utilizada como disparador da primeira aula, quando se fosse discutir a solução de Euler. Nesse sentido, destacaríamos que a resolução do problema por um aluno de Ensino Médio não possui menor valor que a de um matemático.

No dia 27 de setembro de 2013, iniciei a aula recolhendo as cartas produzidas pelos alunos. Na Turma A, dos vinte e dois alunos em sala, cinco não entregaram o material. Em contrapartida, nenhum aluno da Turma B deixou de entregar a carta e nem a entregou em branco. As resoluções das cartas desses alunos foram classificadas na tabela 1, da seguinte forma:

Tabela 1

Classificação das cartas produzidas pelos alunos

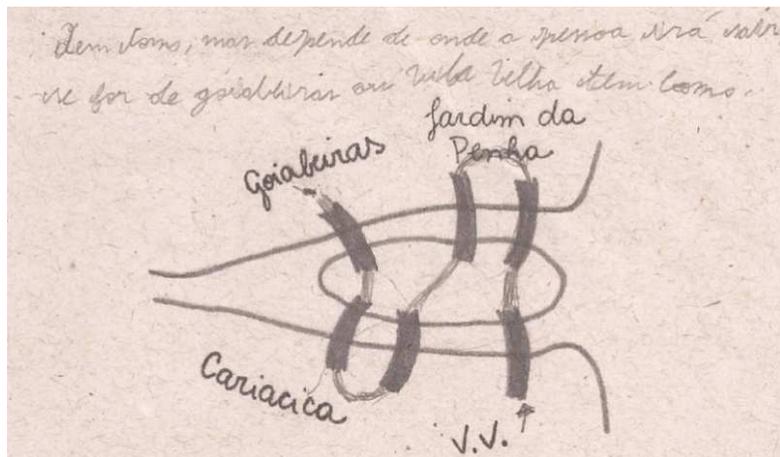
Critério de categorização da resolução	Quantidade de cartas recebidas	
	Turma A	Turma B
Em branco	4	0
Resposta incorreta; sem justificativa; sem solução alternativa para o problema.	6	2
Resposta incorreta; com justificativa; sem solução alternativa para o problema.	1	0
Resposta correta; sem justificativa; sem solução alternativa para o problema.	1	3
Resposta correta; sem justificativa; com solução alternativa para o problema.	5	13
Resposta correta; com justificativa; com solução alternativa para o problema.	0	1
Total	17	19

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador. 2014.

Os principais erros cometidos pelos alunos foram em decorrência da má interpretação do enunciado do problema ou da figura apresentada. Durante a resolução empírica, alguns alunos

cometeram três tipos de erro:

i) Não procurou voltar ao ponto de partida (figura 1), o que indica que o aluno não se atentou para o questionamento sobre a possibilidade de se fazer o percurso e retornar ao ponto inicial. Nesse caso, o que ficou mais evidente para o aluno na carta é o fato de “*atravessar todas de tal forma que cada ponte seja atravessada apenas uma vez*”.

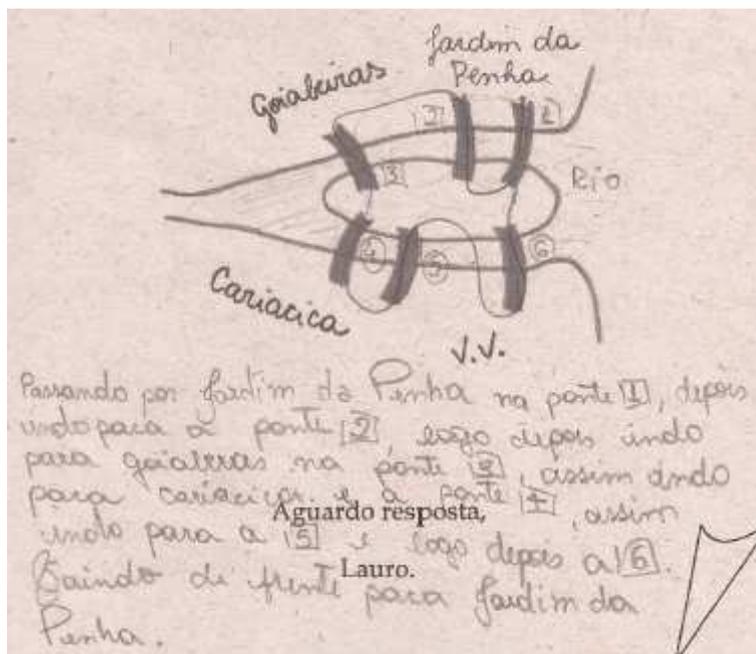


Transcrição do texto:

Tem como, mas depende de onde a pessoa irá sair; se for de Goiabeiras ou Vila Velha, tem como.

Figura 1. Resolução empírica de um aluno da Turma B, com erro do tipo I

ii) Passaram pela mesma ponte duas vezes (figura 2), o que indica que o aluno não se atentou para a orientação de cada ponte só deveria ser atravessada uma única vez. Em oposição ao erro relatado no caso anterior, verificamos que o aluno se atentou mais para o questionamento “*É possível fazer isso e voltar ao ponto de partida?*”.



Transcrição do texto:

Passando por Jardim da Penha na ponte (1), depois indo para a ponte (2), logo depois indo para Goiabeiras na ponte (3), assim indo para Cariacica e a ponte (4), assim indo para a (5) e logo depois a (6). Saindo de frente para Jardim da Penha.

Figura 2. Resolução empírica de um aluno da Turma A, com erro do tipo II.

iii) Não respeitaram a delimitação das pontes (Figura 3), o que aponta para uma não atribuição de significado ao modelo matemático, de modo que o aluno não percebeu que, na prática, estaria indo de Vila Velha à Vitória sem nenhum meio físico especificado.

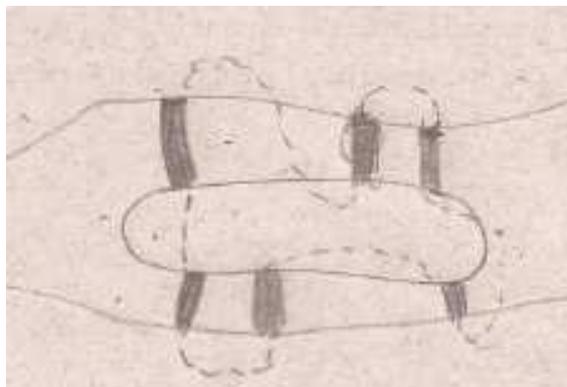


Figura 3. Resolução empírica de um aluno da Turma A, com erro tipo III.

Um erro que não se enquadra nas tipologias apresentadas, mas que nos chamou atenção, está apresentado na figura 4. Na resolução da carta, o aluno tentou estabelecer uma relação entre a quantidade de pontes e de regiões. Na tentativa de usar o quociente entre a quantidade de regiões e a de pontes como argumento, ele demonstrou compreender que a impossibilidade de percurso no mapa apresentado decorre da quantidade de pontes, o que já é uma solução do problema de Teoria dos Grafos.

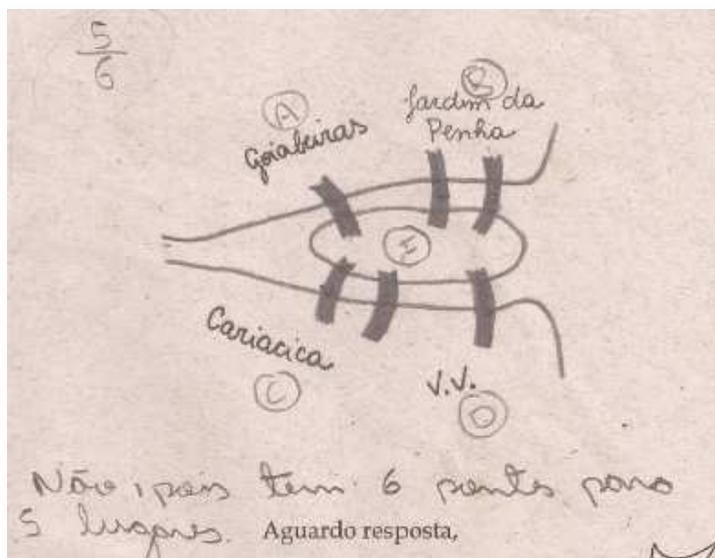


Figura 4. Resolução incorreta que apresenta rudimentos de Teoria dos Grafos.

Embora não tenham justificado sua resposta, alunos das duas turmas apresentaram uma alternativa de trajeto. Sabendo que não poderia ser realizado um percurso que passasse por todas as pontes e voltasse ao ponto de origem passando uma vez pelas pontes, os alunos comentaram

que este percurso poderia ser realizado pela Rodovia do Contorno², como mostra a figura 5.

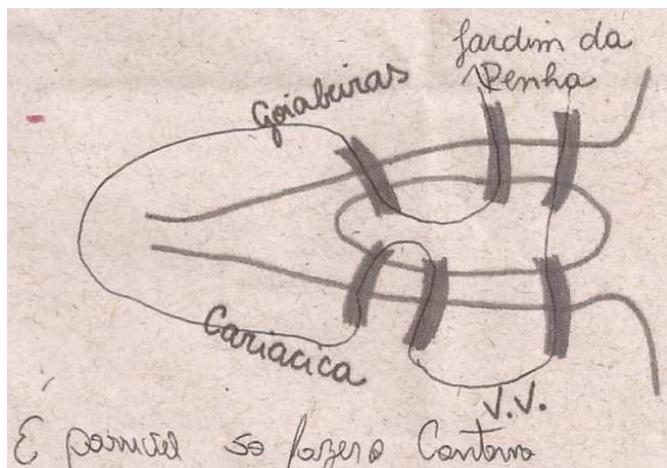


Figura 5. Solução alternativa apresentada pelos alunos.

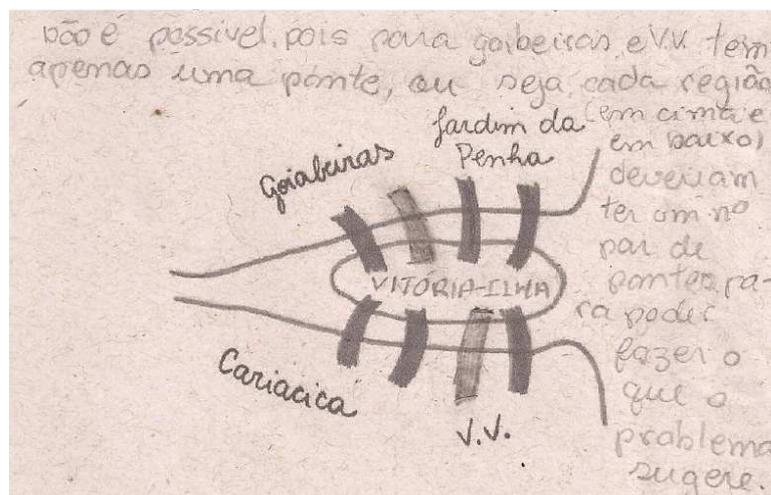
Esta alternativa de trajeto já havia sido apresentada no estudo piloto, onde foi nos revelado que a Rodovia do Contorno atravessa o Rio Santa Maria da Vitória, como mostra a figura a seguir, e, portanto, pode ser considerada uma ponte.



Figura 6. Trecho da Rodovia do Contorno que atravessa o Rio Santa Maria da Vitória.

Apenas um dos alunos conseguiu elaborar um enunciado que justifica a inexistência do caminho solicitado pela professora Carla (figura 7). Ao dizer que “cada região (em cima e em baixo) deveriam ter um número par de pontes”, o aluno apresenta o Teorema dos Caminhos Eulerianos no seu discurso. Assim, como utilizamos esta resolução para discutir a criação da Teoria dos Grafos, inferimos que a utilização da carta adaptada possibilita emergir discussões sobre aspectos básicos e iniciais sobre Grafos.

²A Rodovia do Contorno é o nome popular do trecho da BR-101 entre Carapina, na Serra – Espírito Santo/Brasil, e a interseção da BR-101 com a BR-262, em Cariacica – Espírito Santo/Brasil.



Transcrição do texto:

Não é possível, pois para Goiabeiras e V.V. tem apenas uma ponte, ou seja, cada região (em cima e em baixo) deveriam ter um nº par de pontes para poder fazer o que o problema sugere.

Figura 7. Resolução correta e com justificativa.

Analisando a resolução do aluno, percebemos que ao dizer que “cada região (em cima e em baixo) deveriam ter um número par de pontes”, ele apresenta uma ideia do Teorema dos Caminhos Eulerianos no seu discurso.

Dando continuidade a aula, entregamos a atividade que narra o processo de construção da Teoria dos Grafos, por Euler³. Para leitura do texto e resolução das questões, os alunos se organizaram em duplas ou em trios, que foram designados pelos próprios alunos. Antes de iniciar a correção das atividades, retomamos algumas respostas das cartas produzidas pelos alunos para questioná-los sobre o nível de dificuldade do problema resolvido por Euler. Nesse momento, alunos de ambas as turmas comentaram que o problema não era difícil e que eles perceberam que a inexistência do caminho solicitado na carta decorria da quantidade ímpar de pontes de cada região do mapa. Ainda assim, eles julgaram que tal observação não era pertinente, pois não perceberam que esta seria uma justificativa aceitável para o problema. Nesse momento, destacamos que a História da Matemática também contribui para mostrar que o raciocínio dedutivo também tem importância na matemática. Após relacionar as respostas dos alunos com a resolução de Euler, demos continuidade à discussão das atividades e correção das questões.

Considerações finais

A partir do exposto, foi possível estabelecer relações entre estratégias de resolução de alunos e do matemático Euler. Verificamos que alguns alunos apresentaram rudimentos do Teorema da Existência do Caminho Euleriano e, além disso, um aluno enunciou o teorema durante a resolução do Problema das Pontes de Vitória. Com efeito, essas cartas foram utilizadas como disparador da discussão da solução de Euler. Na ocasião, formalizamos que se um grafo conexo tem mais de dois vértices com grau ímpar, então ele tem passeio euleriano. Com efeito, destacamos que (i) se um grafo conexo tem exatamente dois vértices de grau ímpar, então ele possui um caminho euleriano aberto, que começa em um vértice, percorre todas as arestas e termina em um vértice diferente do inicial e que (ii) se um grafo conexo não tem vértices de grau ímpar, então ele tem um caminho euleriano fechado, que começa e termina no mesmo vértice, percorrendo todas as arestas.

³ Disponível em Sá (2014).

Com essa experiência, entendemos que algumas contribuições da História da Matemática na abordagem da Teoria dos Grafos no Ensino Médio são de caráter cognitivo e social. Por caráter cognitivo, entendemos que os ecos produzidos pelos alunos durante a atividade proposta apontam para uma apropriação do conhecimento facilitado por meio do uso da História da Matemática. Por caráter social, destacamos que a perspectiva histórica nos permite mostrar que a matemática é uma ciência em contínuo desenvolvimento e que este processo é fruto de trabalho de diversas as pessoas.

Referências

- Boero, P., Pedemonte, B., & Robotti, E. (1997). Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a vygotskian perspective. In *PME CONFERENCE, 21nd*, Finlândia. *Anais eletrônicos...* Disponível em: <<http://www.dm.unito.it/semdidattica/2011/app/boero21.pdf>>. Acesso em: 21 out. 2013.
- Brasil. Secretaria de Educação Básica. (2002). *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, Brasil: MEC/SEF.
- Brasil. (2006). *Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília, Brasil: MEC/SEF, 2006.
- Dynnikov, C. M. S. da S., & Sad, L. A. (2007). *Uma abordagem pedagógica para o uso de fontes originais em História da Matemática*. Guarapuava, Paraná, Brasil: SBHMat.
- Espírito Santo. Secretaria da Educação. (2009). *Currículo Básico Escola Estadual - Ensino médio: área de Ciências da Natureza*. Vitória: SEDU, 2009. Disponível em: <http://www.educacao.es.gov.br/download/SEDU_Curriculo_Basico_Escola_Estadual.pdf>. Acesso em: 06 out. 2012.
- Euler, L. (1851). Solution d'un problème appartenant à la géométrie de situation, par Euler. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 10, 106-119 (Traduzido do Latim por E. Coupy).
- Malta, G. H. S. (2008). *Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível* (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática). 158f. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.
- Mendes, I. A. (2009). Atividades Históricas para o ensino de Trigonometria. In A Miguel, et. al (Eds.), *História da Matemática em Atividades Didáticas*. São Paulo, Brasil: Editora Livraria da Física.
- Miguel, A. (1997). As potencialidades pedagógicas da história da matemática da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *ZETETIKÉ*, 5(8), 73-105.
- Miguel, A., & Miorim, M. A. (2011). *História na Educação Matemática: propostas e desafios*. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica Editora.
- Motta, C. D. V. B. (2006). *História da Matemática na Educação Matemática: espelho ou pintura?*. Santos, São Paulo, Brasil: Comunicar.
- Piaget, J., & Garcia, R. (1987). *Psicogênese e história das ciências*. Lisboa, Portugal: Dom Quixote.
- Sá, L. C. (2014). *História da Teoria dos Grafos e algumas contribuições no Ensino Médio* (Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática). Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória – Espírito Santo, Brasil.