Cómo caracterizan el proceso de generalización de patrones futuros profesores de secundaria

Ceneida **Fernández**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
ceneida.fernandez@ua.es
María Luz **Callejo**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
luz.callejo@ua.es
Gloria **Sánchez-Matamoros**
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Sevilla
España
gsanchezmatamoros@us.es
Julia **Valls**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
julia.valls@ua.es

Resumen

Este estudio tiene como objetivo analizar cómo los futuros profesores de secundaria (EPS) reconocen evidencias de la comprensión del proceso de generalización en estudiantes de secundaria a partir de las respuestas dadas a dos problemas de generalización lineal. Los resultados indican que los EPS caracterizaron el proceso de generalización centrando la atención en alguno de los niveles de generalización (el más elemental o el superior) o distinguiendo varios niveles teniendo en cuenta las estrategias empleadas por los estudiantes.

Palabras clave: mirada profesional, comprensión de los estudiantes, problemas de generalización lineal

Introducción

En los últimos años se ha destacado la importancia de la competencia docente *mirar profesionalmente* la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Mason, 2002; Sherin, Jacobs y Philipps, 2010; van Es y Sherin, 2002). Mason (2002) indica que mirar profesionalmente implica: (i) identificar lo que puede ser considerado relevante teniendo en cuenta el objetivo que guía la observación (*intentional noticing*), (ii) describir los aspectos observados (*marking and recording*), (iii) reconocer posibles alternativas de acción (*recognizing choices*), y (iv) validar lo observado intentando que otros reconozcan lo que ha sido descrito o sugerido (*validating with others*). Este autor subraya, por tanto, la importancia de identificar aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza-aprendizaje e interpretar estos aspectos desde referencias previas para fundamentar las decisiones de acción.

Centrándonos en un aspecto particular de esta competencia, mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, cabe señalar que estudios previos han mostrado que la identificación por el estudiante para profesor de los elementos matemáticos que son relevantes para el problema que deben resolver sus alumnos, le permite estar en mejores condiciones para reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes de un determinado tópico matemático (Magiera, van den Kieboom y Moyer, 2013; Fernández, Llinares y Valls, 2012; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2014). Es decir, estas investigaciones previas centradas en el aprendizaje de los estudiantes para profesor subrayan la importancia de la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; Imre y Akkoç, 2012). En este contexto, que los futuros profesores de matemáticas identifiquen el contenido matemático clave para la comprensión de los conceptos matemáticos (key developmental understanding -KDU, Simon, 2006), es un factor importante para reconocer características del aprendizaje de los estudiantes.

La investigación reportada aquí intenta aportar información sobre cómo los estudiantes para profesor de secundaria (EPS) identifican e interpretan el pensamiento matemático de los alumnos de educación secundaria en relación con los procesos de generalización. Los resultados de este estudio aportaran información a la línea de investigación que subraya la importancia de la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre aprendizaje del estudiante, en un dominio matemático específico, los procesos de generalización.

Problemas de generalización de patrones

La generalización de patrones, en nuestro caso identificar un patrón en una sucesión, implica según Radford (2008): (1) tomar conciencia de una propiedad común, (2) generalizar dicha propiedad a todos los términos de la sucesión y (3) usar esa propiedad común a fin de encontrar una regla que permita calcular directamente cualquier término de la sucesión. Como un caso particular de la generalización patrones encontramos la "generalización lineal" donde la regla que permite calcular directamente cualquier término de la sucesión es una función lineal o afín, $f(n)=an+b$.

Los problemas de generalización lineal han sido ampliamente investigados con estudiantes de primaria y secundaria (Stacey, 1989; Callejo y Zapatera, 2014). En estas investigaciones se ha observado que ciertas cuestiones son fácilmente resueltas por los estudiantes, paso a paso a través de un dibujo o contando, y otras, sin embargo, les resulta difícil de resolver al no poderlo hacer paso a paso; por ejemplo, obtener el término 100 de una sucesión. Las primeras han sido categorizadas por Stacey (1989) como de "generalización cercana", y las segundas como de “generalización lejana”. También se han identificado tres tipos de estrategias en la resolución de estos problemas: (1) *estrategias aditivas* o *recursivas*, en las que el estudiante observa que cada término aumenta en una diferencia constante; (2) *estrategia funcional* donde el estudiante utiliza una expresión para calcular un término específico de la sucesión o el número de elementos de un término cualquiera; y (3) *razonamiento proporcional*, usando la relación $f(n) = dn$, siendo d la diferencia entre términos consecutivos, que es incorrecto cuando la relación no es lineal (English y Warren, 1998; Stacey, 1989).

En relación al comportamiento de los estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas de generalización lineal, se han identificado tres niveles de *generalización* (García-Cruz y Martinón, 1998): (1) *actividad procedimental* que se caracteriza porque los estudiantes reconocen el carácter iterativo o recursivo del modelo lineal, lo que se traduce en hacer un recuento o añadir la diferencia constante; (2) *generalización local*, que se caracteriza porque los estudiantes hacen uso de una regla para un cálculo específico; y (3) *generalización global*, donde los estudiantes transforman la regla usada en tareas anteriores en un objeto que se aplica en nuevas situaciones. También se han constatado distintos grados de *flexibilidad en el uso de estrategias* (Callejo y Zapatera, 2014): (1) uso exclusivo de una estrategia recursiva, (2) cambio de una estrategia recursiva a una proporcional; (3) cambio de una estrategia recursiva a una funcional.

Teniendo en cuenta estas referencias previas, nuestro estudio tiene como objetivo explorar el conocimiento de futuros profesores de secundaria sobre su competencia para abordar una tarea profesional como es interpretar la comprensión matemática de los estudiantes cuando resuelven problemas de generalización lineal de patrones.

En este estudio nos hemos planteado la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Cómo los futuros profesores identifican evidencias de la comprensión de los estudiantes de secundaria del proceso de generalización?

Método

Participantes y contexto

Los participantes fueron 7 estudiantes del Master Universitario en profesorado de Educación Secundaria, especialidad matemática, en el contexto de un módulo de enseñanza diseñado ad hoc en la asignatura “Aproximación didáctica a la resolución de problemas de matemáticas” (Figura 1).

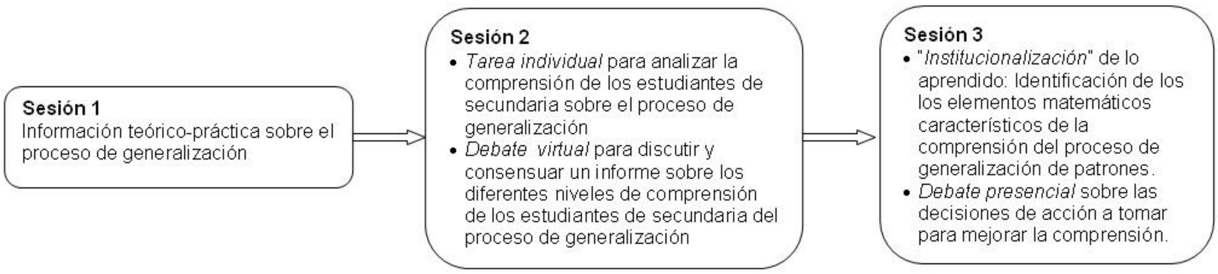

Figura 1. Módulo de enseñanza.

Uno de los objetivos de esta asignatura es que los estudiantes empiecen a desarrollar una “mirada profesional” sobre la enseñanza de la resolución de problemas en particular, y la enseñanza de las matemáticas en general. En la sesión 1 los EPS trabajaron el proceso de generalización en el marco de la propuesta de Mason, Burton y Stacey (1992) que plantea este proceso en conexión con el de particularización.

Instrumento de recogida de datos

Esta investigación la vamos a centrar en la tarea individual que se indica en la sesión 2 (Figura 1). Los datos de la misma serán las respuestas de los EPS a la tarea individual, que tenía como objetivo obtener información sobre su capacidad de identificar evidencias de la comprensión matemática de los estudiantes de secundaria sobre el proceso de generalización.

Esta tarea presenta la estructura que se muestra en la figura 2: está formada por dos problemas de generalización lineal (adaptados de investigaciones previas, Zapatera y Callejo, 2013; Rivera y Becker, 2005) con respuestas de seis estudiantes de secundaria en cada uno de ellos (Figura 3) y de cuatro cuestiones que inciden en la dimensión profesional de la enseñanza:

***A. Describe** cómo ha resuelto cada estudiante los problemas 1 y 2 en relación al proceso de generalización.*

***B1. Agrupa** los estudiantes que presentan características comunes del desarrollo del proceso de generalización.*

***B2. Caracteriza** cada uno de los subgrupos que has formado*

***C.** Indica en qué se **diferencian** los distintos grupos*

Las dos primeras cuestiones, A y B1, piden a los EPS que identifiquen e interpreten características de la comprensión del proceso de generalización de los estudiantes reflejadas en sus respuestas y los agrupen según estas características. Las dos últimas, B2 y C, piden a los EPS que caractericen y diferencien cada uno de los grupos establecidos.

Problema 1	Problema 2
Respuesta de Ana	Respuesta de Ana
Respuesta de Beatriz	Respuesta de Beatriz
Respuesta de Carlos	Respuesta de Carlos
Respuesta de Daniel	Respuesta de Daniel
Respuesta de Elena	Respuesta de Elena
Respuesta de Fernando	Respuesta de Fernando

4 cuestiones profesionales

Figura 2. Estructura de la tarea.

En los dos problemas (Figura 3) se presenta una sucesión de figuras compuestas por cuadros y bolas (problema 1; Callejo y Zapatera, 2014) y cuadrados blancos y negros (problema 2; Rivera y Becker, 2005). La regla general es una función afín, $f(n) = an + b$ con $b \neq 0$. Pero mientras la sucesión de figuras del primer problema crece en sentido vertical, la sucesión del segundo crece en sentido vertical y horizontal. Las dos primeras cuestiones de los dos problemas son de generalización cercana y se pueden resolver siguiendo una estrategia aditiva mediante recuento, con o sin dibujo, o con un método recursivo, apoyándose en el término anterior. La cuestión 3, de generalización lejana, también se puede resolver con una estrategia aditiva, aunque resulta laborioso. Las cuestiones 4 y 5 piden expresar la regla general, ya sea en forma verbal o algebraica.

Problema 1

Las tres figuras siguientes son los primeros términos de una sucesión donde los cuadrados están formados por puntos (bolas) y segmentos (palos):

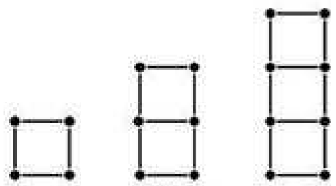

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 4?
2. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 6?
3. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 20?
4. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de bolas.
5. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de palos.

Problema 2

Las tres figuras siguientes son los primeros términos de una sucesión:

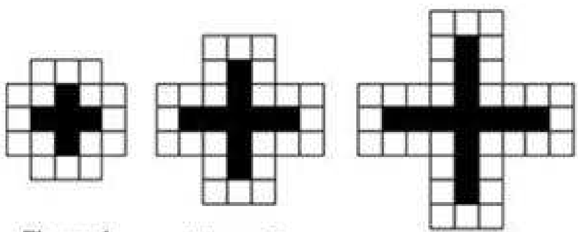

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 4?
2. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 6?
3. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 20?
4. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de cuadrados negros.
5. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de cuadrados blancos.

Figura 3. Problema 1 y 2 del cuestionario.

Por otra parte, las respuestas seleccionadas de alumnos de secundaria (Figura 3) reflejan distintos niveles de generalización (García-Cruz y Martinón, 1999):

> *Nivel 1*, *actividad procedimental*, los estudiantes reconocen el carácter iterativo o recursivo del modelo lineal, lo que se traduce en hacer un recuento o añadir la diferencia constante (Carlos y Daniel, Figura 4).

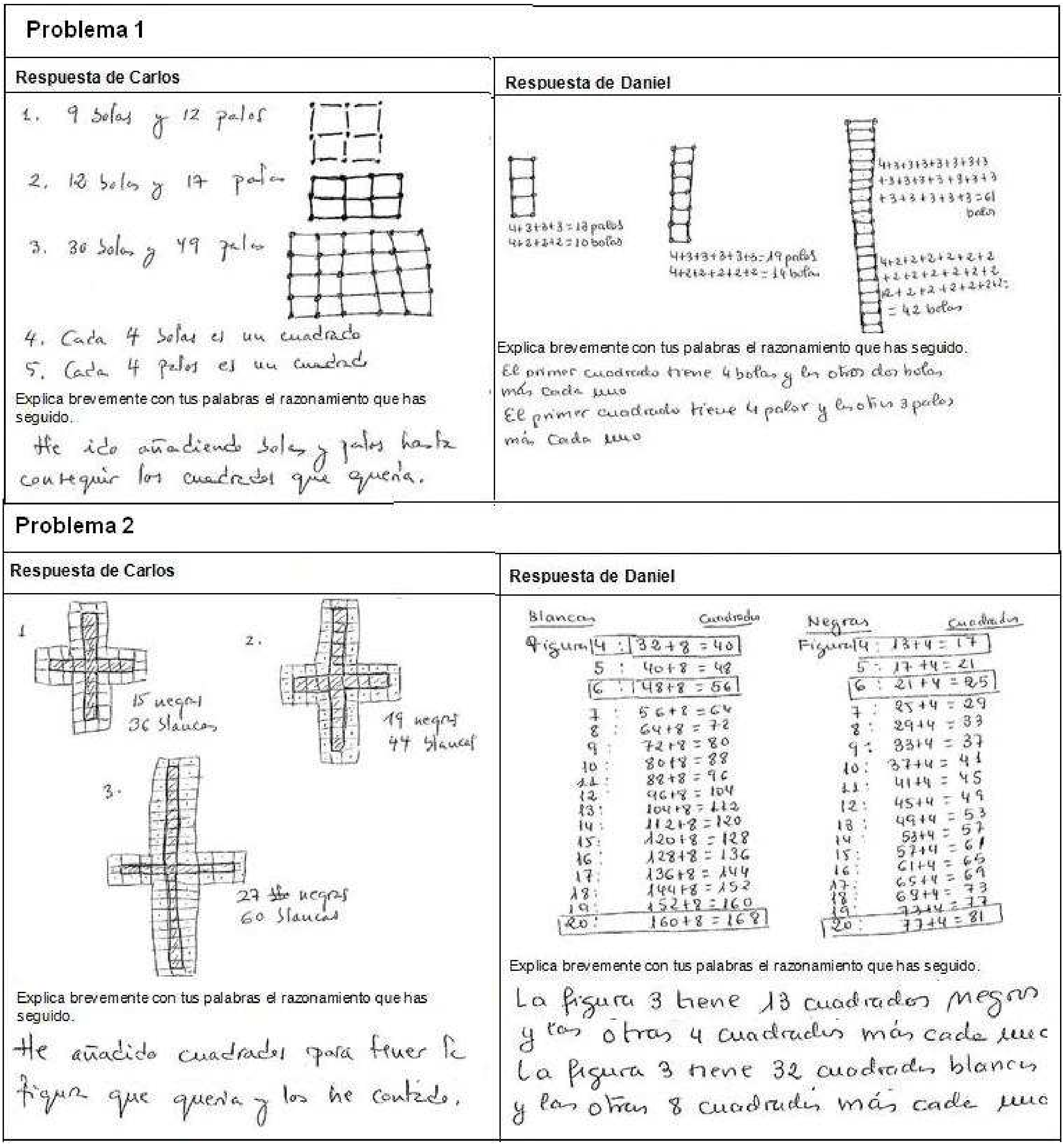

Figura 4. Respuestas de carácter procedimental a los problemas 1 y 2 del cuestionario

Nivel 2, *generalización local*, los estudiantes hacen uso de una regla para un cálculo específico (Fernando y Ana, Figura 5).

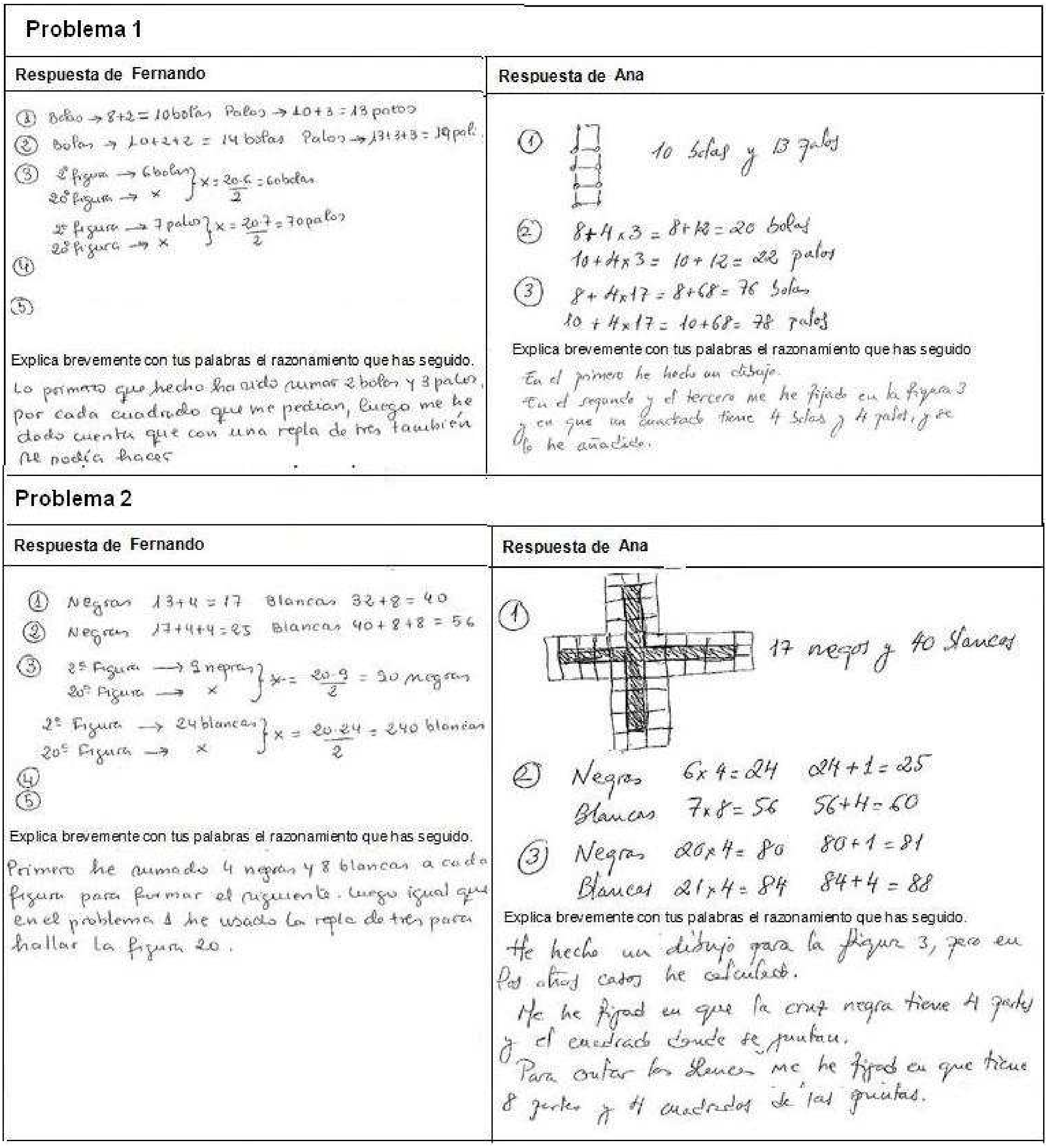

Figura 5. Respuestas de generalización local a los problemas 1 y 2 del cuestionario

Nivel 3, generalización global, los estudiantes transforman la regla usada en tareas anteriores en un objeto que se puede aplicar en nuevas situaciones (Beatriz y Elena, Figura 6).

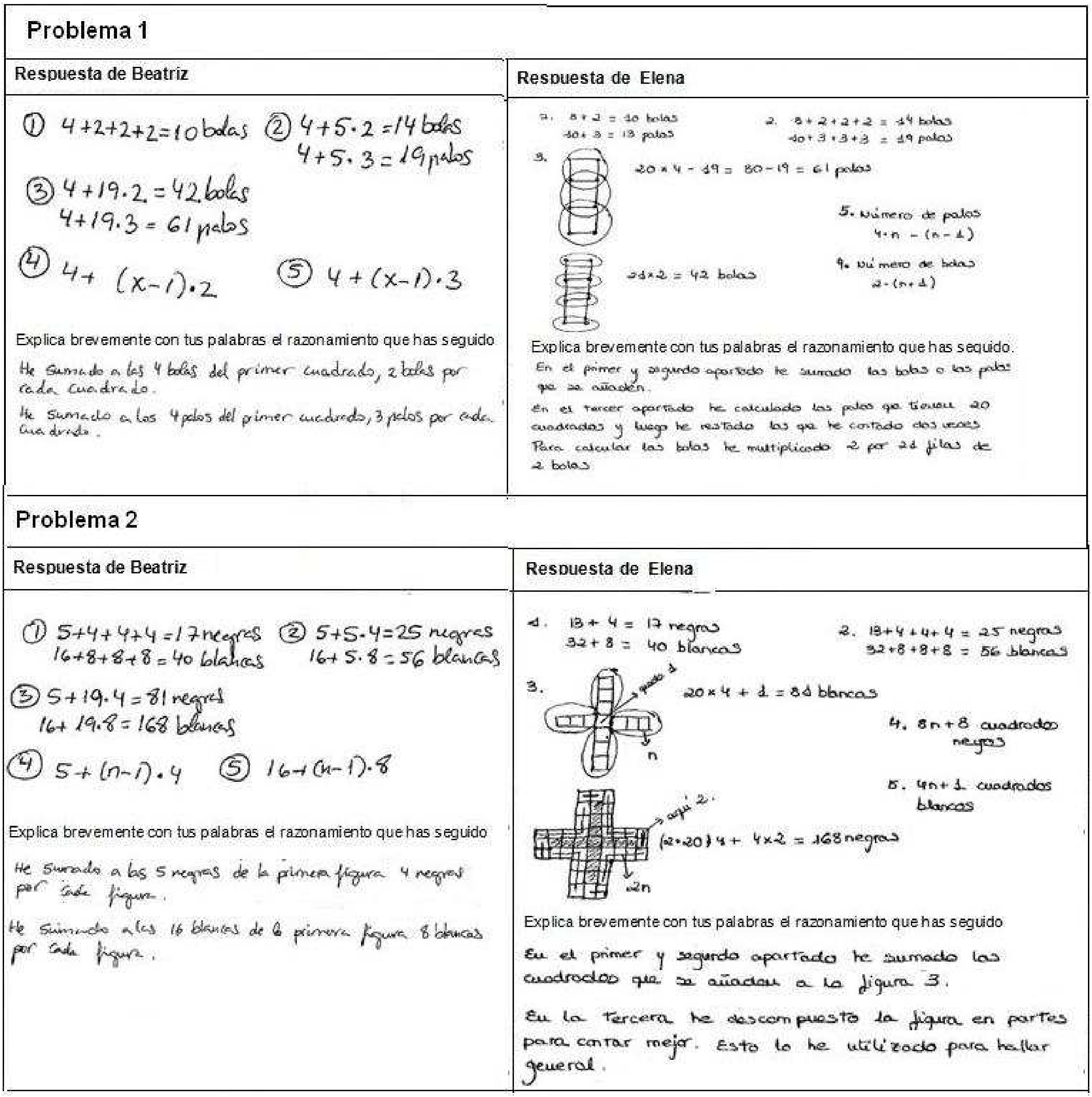

Figura 6. Respuestas de generalización global a los problemas 1 y 2 del cuestionario

Análisis de los datos

Las agrupaciones de los estudiantes de secundaria (cuestión B1) realizadas por los EPS, a partir de las características del desarrollo del proceso de generalización que aportaban para justificar las agrupaciones realizadas (cuestión A1), fueron analizadas por cuatro investigadores. Los acuerdos y desacuerdos fueron discutidos con el objetivo de consensuar las evidencias que aportaban los EPS sobre las características del desarrollo del proceso de generalización. Este análisis permitió identificar cuatro caracterizaciones dadas por los EPS del proceso de generalización (se exponen en el apartado de resultados) como evidencias de la comprensión del proceso de generalización lineal de patrones. De esta manera, este proceso de análisis permitió identificar qué es lo que los EPS identificaban como evidencia y cómo lo interpretaban.

Resultados

En esta sección describimos lo que los EPS consideraban evidencias del desarrollo de la comprensión del proceso de generalización de patrones.

Los EPS consideraron cuatro características de la comprensión del proceso de generalización: (1) intento de llegar a la regla general, (2) generalización cercana y lejana, (3) uso del método recursivo y (4) todo o nada.

Una primera característica fue considerar si los estudiantes de secundaria habían intentado o no llegar a la regla general y lo habían hecho con éxito. De este modo, los estudiantes de secundaria fueron agrupados teniendo en cuenta:

- si habían intentado llegar a la regla general aunque no lo hubiesen conseguido (Ana y Fernando);
- si no lo habían intentado (Daniel y Carlos); y
- si habían llegado con éxito a obtener la regla general (Beatriz y Elena).

Desde este punto de vista, los EPS se fijaron en si los alumnos de secundaria habían sido capaces de pasar de una estrategia aditiva a una funcional, aunque el intento fuese erróneo. Por ejemplo, PSJ justificó la agrupación realizada del siguiente modo (<u>énfasis añadido</u>):

> *"<u>Beatriz y Elena</u> porque resuelven correctamente los problemas, si son figuras que se pueden visualizar y luego <u>generalizan correctamente mediante una fórmula</u>.*
>
> *<u>Ana y Fernando</u> porque <u>resuelven los problemas correctamente si son figuras que se pueden representar y por tanto observar visualmente</u>. Pero a la hora de generalizar no prestan atención a que en el problema 1 hay palos y bolas comunes para todas las figuras y para el problema 2 cuadrados blancos y negros para todas las figuras, en consecuencia hay elementos contados dos veces, es decir, <u>no llegan a generalizar correctamente.</u>*
>
> *<u>Daniel y Carlos no intentan generalizar</u> a través de ninguna fórmula. Carlos resuelve los problemas sin prestar atención a que es una sucesión y en consecuencia hace cosas sin sentido. Daniel resuelve los problemas correctamente si son figuras que se pueden representar y por tanto observa visualmente.*
>
> *Considero que <u>la diferencia entre el grupo de Daniel-Carlos y Ana-Fernando es que este último grupo al menos ha intentado generalizar aunque no haya tenido éxito</u>."*

La otra característica considerada tuvo en cuenta cuál/cuáles de las cuestiones se habían resuelto correctamente: las de generalización cercana (Ana y Fernando), las de generalización lejana (Daniel) y regla general (Elena y Beatriz), haciendo notar que Carlos lo había resuelto incorrectamente. Por ejemplo, JIN justificó su agrupación del siguiente modo (<u>énfasis añadido</u>):

> *"<u>Beatriz y Elena</u> resuelven todos los ejercicios correctamente y además <u>hallan la fórmula general</u> aunque por dos caminos distintos.*
>
> *<u>Daniel</u> porque <u>resuelve los tres primeros apartados de los dos problemas pero no llega a generalizar</u> (regla general), le falta este último paso.*

> *Fernando, Ana y Carlos. Carlos no realiza correctamente los apartados de los dos problemas. Ana y Fernando aunque resuelven bien los dos primeros apartados, utilizan métodos incorrectos para el siguiente apartado."*

La tercera característica considerada fue tener en cuenta si los estudiantes de secundaria habían reconocido el carácter recursivo del modelo lineal (Elena, Beatriz, Ana, Daniel y Fernando) o si lo había hecho incorrectamente (Carlos). Por ejemplo, JCB escribió (énfasis añadido):

> *"Elena, Beatriz, Ana, Daniel y Fernando porque intentan averiguar de dónde partimos y a partir de ahí intentan averiguar el número de la figura con el incremento de los elementos, es decir, realizan una adición de elementos respecto un patrón inicial.*
>
> *Carlos tiene problemas de establecer las sucesiones de elementos."*

Finalmente, la cuarta característica fue considerar únicamente o "Todo o nada". Desde este punto de vista solo se tenía en cuenta si el estudiante de secundaria había llegado a una fórmula general (Beatriz y Elena) o no (Ana, Daniel, Carlos y Fernando). Por ejemplo, SVD justificó su agrupación del siguiente modo (énfasis añadido):

> *"Beatriz y Elena generalizan correctamente. Ana, Daniel, Carlos y Fernando intuyen la idea de generalización en sus explicaciones pero se equivocan al observar cuál es el patrón de crecimiento".*

Discusión

Este estudio aporta información sobre el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para profesor cuando interpretan la comprensión de los estudiantes de secundaria sobre los procesos de generalización.

Los resultados muestran diferentes formas de caracterizar los procesos de generalización y la influencia de esta caracterización en determinar la comprensión de los estudiantes de secundaria. Algunos EPS caracterizaron el proceso de generalización como el intento de llegar a una *generalización global* (García-Cruz y Martinón, 1998). Estos EPS valoraron más el intento de encontrar una regla para un cálculo específico, aunque fuese incorrecta (Ana y Fernando), que el reconocimiento del carácter recursivo del patrón de crecimiento de la respuesta de Daniel, que le permitió dar la respuesta correcta a los tres primeros apartados, aunque no intentara buscar una regla general. Esta aproximación adoptaba por los EPS podría poner de manifiesto que consideran que no todas las estrategias de resolución son igualmente potentes para llegar a obtener la regla general, pues difícilmente se puede responder a una tarea donde se pide obtener la regla general con una estrategia aditiva (Callejo y Zapatera, 2014: Orton y Orton, 1994) y, por tanto, refleja distintos niveles de comprensión de los estudiantes de secundaria de la idea de generalización. Otros EPS caracterizaron el proceso de generalización considerando distintos niveles, lo que les llevó a caracterizar la comprensión de los estudiantes diferenciando tres niveles: aquellos que llegaban a la generalización cercana (actividad procedimental), aquellos que llegaban a la lejana (generalización local) y aquellos que llegaban a la regla general (generalización global). Por otra parte, hubo EPS que solo tuvieron en cuenta en su caracterización el llegar o no expresar la fórmula general, lo que les llevó a determinar la comprensión de los alumnos como "todo o nada", y otros que solo consideraron si el estudiante de secundaria había reconocido el carácter recursivo del modelo lineal lo que demuestra que solo se centraron en el primer nivel de generalización, la actividad procedimental (García-Cruz y Martinón, 1998).

Estos resultados muestran que aquellos EPS que identificaron como elementos clave (KDU, Simon, 2006) del proceso de generalización distintos niveles de este proceso, bien caracterizando este proceso en tres niveles o bien como “intento” de llegar a la regla general, fueron capaces de interpretar las respuestas de los estudiantes de secundaria identificando distintos niveles de comprensión del proceso de generalización. Luego, es necesario que los EPS sean capaces de desempaquetar este conocimiento de matemáticas que les permitirá identificar la comprensión de los estudiantes de secundaria y tomar decisiones de acción pertinentes; y por tanto, desarrollar la competencia docente una mirada profesional.

Finalmente, es relevante subrayar que estos resultados son similares a los obtenidos por Magiera, et al. (2013) en álgebra, por Fernández, et al. (2012) en el razonamiento proporcional y por Sánchez-Matamoros, et al. (2014) en el concepto de derivada. Sin embargo, aporta información a esta línea de investigación en relación a otro dominio matemático, la generalización lineal.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España y de grupos de investigación emergentes GV/2014/075 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana

Referencias y bibliografía

Bartell, T., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16,* 57-79.

Callejo,M.L. y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema, 28*(48), 64-88.

Fernández, C., Callejo, M.L., & Márquez, M. (2012). Valoración de respuestas a problemas de división-medida con fracciones por estudiantes para maestro. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 219-227). Jaén: SEIEM

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students’ mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education, 44,* 747-759.

García-Cruz, J.A., &Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. En A. Olivier y K. Newstead (eds.), *Proceeding of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 329-336). University of Stellenbosch. Stellenbosch, South Africa.

Imre, S., & Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers’ pedagogical content knowledge of generalising number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15,* 207-226.

Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers’ knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 84,* 93-113.

Mason, J. (1996). Expresing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Hiera, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-89). Dortrecht: Kluwer.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing.* London: Routledge-Falmer.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: MEC-Labor.

Orton, A., & Orton, J. (1994). Students' perception and use pattern and generalization. En J.P. da Ponte, & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 407-414). Lisboa: University of Lisbon.

Radford, L. (2008). Iconicity and construction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40*, 83-96.

Rivera, F.D., y Becker, J. (2005). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 465-472). Prague: PME.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, doi: 10.1007/s10763-014-9544-y

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (Eds) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge

Simon, M. (2006). Key developmental understanding in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(4), 359-371

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Van Es, E., & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571-596.

Zapatera A., & Callejo, M.L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM