APOE y la Generalización como Estrategia Cognitiva para el Aprendizaje en Técnicas de Conteo

Isabel **Maturana** Peña
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Chile
isamatup@hotmail.com

Marcela **Parraguez** González
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Chile
marcela.parraguez@ucv.cl

Alejandro **Nettle** Valenzuela
Departamento de Matemática y Estadística, Facultad de CNE, Universidad de Playa Ancha.
Chile
anettle@upla.cl

Resumen

Basados en la teoría APOE, se propone en para el trabajo de taller, por una lado, una descomposición genética para interpretar estrategias cognitivas en el aprendizaje de los procesos de generalización, en tres situaciones de conteo a partir de configuraciones figurales, y por otro, construcción de una propuesta de enseñanza, con el propósito de modelar la problemática de aprendizaje referida a las técnicas de conteo. Se muestran algunos de los resultados obtenidos con nuestra propuesta aplicada a estudiantes de educación secundaria y superior.

Palabras clave: conteo, generalización, Teoría APOE.

Introducción

Con el propósito de modelar la problemática de aprendizaje referida a la generalización en técnicas de conteo, y usando como referente teórico la teoría APOE (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014), se diseña una descomposición genética general para tres situaciones en las que la generalización del conteo ofrece características particulares de

construcción, las que facilitan la reconstrucción de las estrategias cognitivas inmersas en el conteo.
Algunas de las evidencias obtenidas, sobre la problemática de enseñanza aprendizaje en relación a las estrategias de conteo, dan cuenta de la existencia de un problema de coordinación entre el conteo y el cardinal, surgen así propuestas de enseñanza, como la de Dubinsky y Fenton (1996) donde promueven el uso de la programación con ISETL como soporte en la enseñanza de problemas de conteo. Otra aproximación, sobre cómo enseñar técnicas de conteo, son las evidencias que obtienen Salgado & Trigueros (2009), en su investigación sobre conceptos básicos de conteo (ordenación y combinación) a partir de las cuales diseñaron y analizaron una propuesta didáctica basadas en el ciclo de enseñanza de la teoría APOE. Sierra & Rodríguez (2012), desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, presentan una organización didáctica para el estudio del número y la numeración en la Educación Infantil.
En nuestro pais, el estudio de la combinatoria es propuesto por el Ministerio de Educación (MINEDUC, 1998) en segundo año medio (estudiantes entre 16 y 17 años de edad) en los planes de estudio de *Estadística y Probabilidad*, donde contempla la iteración de experimentos sencillos, por ejemplo: lanzamiento de una moneda, su relación con el triángulo de Pascal e interpretaciones combinatorias. Es así que se integra la combinatoria como parte de la educación general en Chile. Por otra parte, en los planes y programas de la mayoría de los cursos de álgebra en los primeros años en la educación superior universitaria chilena, para carreras como ingenierías, licenciaturas en ciencias, pedagogía en matemáticas y física, aparecen los conceptos de Combinatoria, formando parte de los contenidos para la enseñanza de los Números Naturales.

Teoría APOE

La teoría APOE –Acción, Proceso, Objeto, Esquema– toma como base la epistemología genética de Piaget. Según Kú, Trigueros y Oktaç (2008), esta teoría nace al estudiar el mecanismo de entendimiento de la Abstracción Reflexiva piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las acciones y procesos que se efectúan desde un objeto de conocimiento. Desde el punto de vista de la teoría APOE la construcción del conocimiento pasa por tres etapas básicas: acciones, procesos y objetos, las cuales no necesariamente son secuenciales. Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir. “Las acciones son más limitadas que otras construcciones mentales, pero son el principio crucial en la construcción del conocimiento” (Dubinsky, 1996, p. 34). Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso, es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción proceso de una transformación, puede reflexionar sobre ésta, describirla, o incluso revertir los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996). Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto” (Ibíd.). En resumen, el tránsito por las construcciones mentales desde APOE se puede ver de la siguiente manera: se dice que un individuo evidencia una concepción acción cuando solamente es capaz de realizar transformaciones a algún objeto motivado por estímulos externos y no por sí solo. Si este individuo reflexiona sobre estas acciones y las realiza conscientemente, se dice que las acciones se han interiorizado, por lo que muestra una concepción proceso. Dos o más procesos se pueden coordinar en un nuevo proceso. Cuando surge internamente la necesidad de transformar los procesos desarrollados, el individuo los encapsula en objetos, sobre los cuales puede volver a aplicar acciones. Los objetos se organizan en esquemas, que a su vez se relacionan con otros esquemas. El esquema, "es un nivel de mayor elaboración en la comprensión de un concepto matemático y está relacionado de manera coherente en la mente del estudiante." (Asiala et al, 1996, p. 12). Cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos. En la Figura 1 se muestra un diagrama de las construcciones y la abstracción reflexiva.

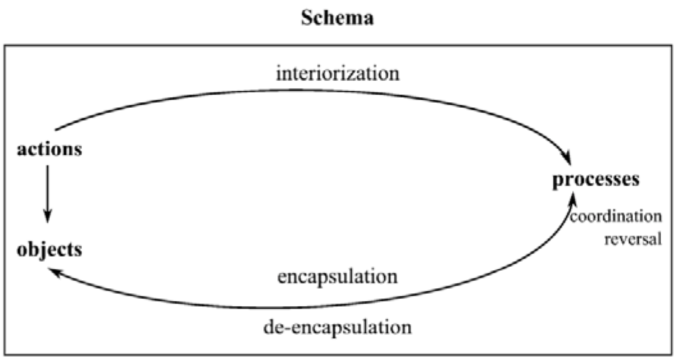


Figura 1. Construcciones y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Arnon et al., 2014, p. 18).

Diseño metodológico

La experiencia se desarrolló como un estudio de casos (Stake, 2010), insertos en el periodo académico del primer semestre del 2014, con estudiantes correspondientes a un grupo heterogéneo de primer año de la carrera en pedagogía y licenciatura en matemática en dos universidades chilenas, etiquetas como casos de estudio (Universidad 1 y Universidad 2). Por otra parte, a los casos de estudios incrustamos el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como descomposición genética; un diseño, basado en la descomposición genética teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Arnon et al., 2014).

La descomposición genética

Proponemos el siguiente modelo de descomposición genética para la construcción de una técnica de conteo específica relacionada con problemas que requieran de representaciones figurales. Comenzaremos la descripción de la construcción considerando, la concepción mental acción como motor para la descripción de una estrategia de conteo, las acciones se realizan sobre las construcciones mentales objeto de regiones poligonales y de los números naturales, donde una construcción mental esquema tematizado del concepto sistema referencial, contiene a ambos objetos. Todos ellos son coordinados mediante una función inyectiva, que organiza el conteo iniciado; para continuar la repetición de estas acciones bajo variaciones controladas, permitiendo establecer lo invariante, como una construcción mental proceso, las que se transforman en concepciones mentales procesos generalizados mirados como un todo, técnicamente sustentado por APOE como un Totality (como una construcción mental, que concibe al proceso como un todo), que se encapsulan en un objeto que se rotula mediante una conjetura explícita.

La propuesta

Los evidencias que hemos obtenido confirman las problemáticas subyacentes en el aprendizaje de estrategias de conteo y sus generalizaciones; por esta razón separamos en tres situaciones los procesos de generalización: dos con una apariencia análoga basados en el conteo sobre geoplanos donde las estrategias de generalización tienen dos sentidos opuestos, uno mediante la incrustación sistemática de figuras para la construcción de la generalización y el otro, donde la generalización se obtiene de separar la totalidad externa de lo interno, para finalizar con una propuesta de conteo, donde su sencillez oculta los obstáculos en la simplificación necesaria para obtener la fórmula clásica de conteo.

Sostenemos como hipótesis en la formulación de este taller, que las tres situaciones que presentamos permiten la manipulación de objetos mediante la visualización (como representaciones figurales), e incorporamos la teoría APOE para identificar e interpretar las estructuras cognitivas involucradas en los procesos de generalización, las que ayudan a entender cómo contamos. En nuestro estudio es mediante acciones sobre objetos matemáticos, que describiremos en detalle la construcción de la generalización como fundamento del conteo.

Las Actividades y sus Análisis

Polígonos con Vértices en un Geoplano

El Geoplano fue inventado por el matemático y pedagogo egipcio Caleb Gattegno (1911-1988) para enseñar geometría a niños pequeños. Consiste en una superficie plana en la que se dispone, de manera regular, una serie de puntos. Dependiendo de cómo estén colocados estos puntos se distinguen varios tipos de Geoplanos, aunque los que más se utilizan son el Geoplano triangular, el cuadrado o cuadrangular y el circular.

El Geoplano es una herramienta, sencilla y eficaz, que permite a los estudiantes experimentar con modelos matemáticos y construir conceptos numéricos en diversos contextos. Por otra parte, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es empleado, entre otras cosas, para construir figuras geométricas y establecer regularidades en su construcción las que permitirían extraer sus características fundamentales; y es este nuestro propósito, para algunas de las situaciones que se plantean en el taller, calcular área y perímetro de polígonos, como una herramienta para la construcción de mecanismos y construcciones mentales asociados a la generalización como proceso cognitivo necesario en la matemática.

Presentación de las actividades con geoplanos

Un ***geoplano*** de malla cuadrada es una configuración rectangular de puntos de formas como las siguientes:

```
*  *  *  *  *  *          *  *  *
*  *  *  *  *  *          *  *  *
*  *  *  *  *  *          *  *  *
*  *  *  *  *  *
```

Los geoplanos de las figuras anteriores diremos que son del tipo 4×6 (4 filas y 6 columnas) y de tipo 3×3, respectivamente. En las actividades que siguen los geoplanos son de malla cuadrada.

Situación 1

Primer Desafío

Investigue cuál es el polígono de mayor cantidad de lados (o vértices) que pueden dibujarse, si los vértices son puntos de un geoplano de malla cuadrada de tipo $n\times n$, con $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

Segundo Desafío

Demuestre su descubrimiento por inducción.

Evidencias obtenidas de la Situación 1

Presentamos la primera situación a estudiantes de un establecimiento educacional chileno con edades entre 17 y 18 años, y sus respuestas, se transformaron en hacer varios intentos de dibujos para diferentes geoplanos de un mismo orden, y después proceder a contar sus lados, y ver cuál es el óptimo, por ejemplo, en la Figura 2 se ilustra lo comentado.

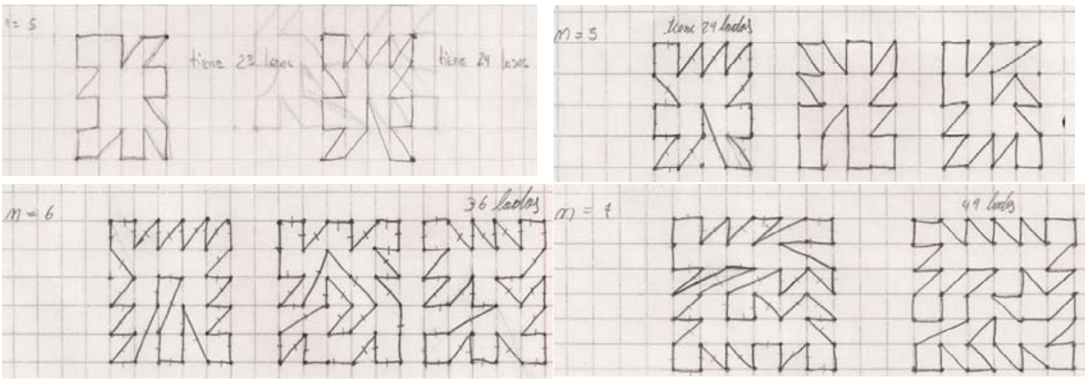


Figura 2. Respuestas de los estudiantes del Universidad 1.

Sin embargo, en este grupo de estudiantes no logramos obtener evidencias de estudiantes que incrustaran una figura dentro de otra, esto es por ejemplo suponer que para un geoplano de $n = 3$ tenemos la siguiente Figura 3, la cual la podemos incrustar en un geoplano de $n = 7$, obteniendo la Figura 4.

Figura 3.

Figura 4.

Esta forma de proceder de los estudiantes hizo que no alcanzaran una demostración por inducción. Por ello se propone un trabajo en etapas, desde la teoría APOE para el Taller, de tal forma que los asistentes alcancen la demostración por inducción de la conjetura que ellos propongan.

La Propuesta desde la perspectiva teórica de APOE

Se propone completar la Tabla 1, Tabla 2 y Tabla 3, para alcanzar la generalización de un proceso inductivo.

Tabla 1. *Desarrollo de la actividad del taller a partir de construcciones mentales acciones.*

Geoplano de malla cuadrada *n* x *n* puntos	**Polígono de mayor cantidad de lados construido**	**Número de lados del polígono construido**
Para $n = 2$		Polígono de 4 lados
Para $n = 3$		Polígono de 7 lados
Para $n = 4$		
Para $n = 5$		Polígono de 24 lados

Tabla 2. *Desarrollo de la actividad a partir de construcciones mentales procesos que se Encapsulan.*

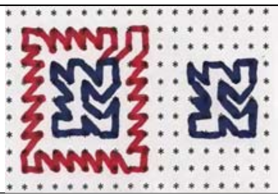
Para $n = 6$		
Para $n = 7$		Polígono de 47 lados
Para $n = 8$		Polígono de 64 lados
Para $n = 9$		

Tabla 3. *Desarrollo de la actividad a partir de construcciones mentales acciones sobre objetos.*

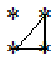
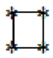
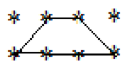
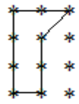
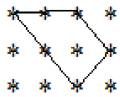
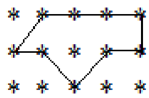
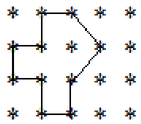
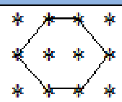
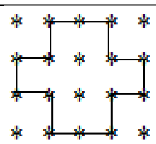
Para $n = 10$		Polígono de 100 lados

Situación 2

Primer Desafío

Complete la Tabla 4 y responda las preguntas que aparecen al final de ella.

Tabla 4. *Completar la información faltante.*

FIGURA	NÚMERO DE PUNTOS	ÁREA
	3	1/2
	4	1
		2
	9	
	12	5
	6	3
		
	10	
	8	4
	6	4
	14	
	13	8

Preguntas

- ¿Existe relación entre el número de puntos interiores del polígono y su área? Podría explicar.
- ¿Existe alguna relación entre el número de puntos en el geoplano y el área de un polígono? Podría explicar.

Segundo Desafío

Encuentre todos los polígonos de área ½ en un geoplano de 5 x 5 puntos.

Evidencias obtenidas de la Situación 2

Se realizó la experiencia con estudiantes universitarios y las evidencias obtenidas dan cuenta que no lograron establecer en forma explícita la fórmula de Pick (Sea *i* el número de puntos interiores del polígono y *B* el número de puntos en el borde del polígono, entonces el área *A* del polígono se puede calcular a partir de la fórmula: $A = i + \frac{B}{2} - 1$), no obstante lograron dar respuesta a lo concreto, esto es representaciones figurales adecuadas a las acciones pedidas, la Figura 5 es una evidencia de ello:

Figura 5. Producción de un estudiante de la Universidad 1 en la completación de la tabla.

En la Figura 6, es posible apreciar la estrategia, de un estudiante, para dar respuesta a una de las preguntas, la que no alcanza a transformarse en argumento.

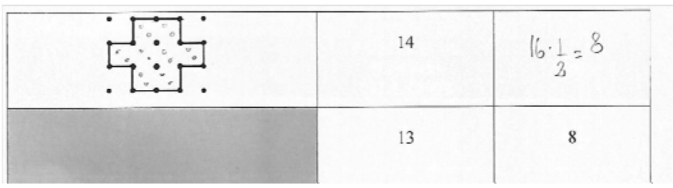


Figura 6. Producción de estudiante de la Universidad 2 en la completación de la tabla.

Podemos concluir que en ambas producciones (Figura 5 y Figura 6), no se dio sustento a los procesos de generalización necesarios para la construcción de la fórmula de Pick.

El Problema y su análisis. El Área en un Geoplano. Teorema De Pick

Basados la propuesta de Verdugo, Briseño, Vázquez y Palmas (2000) sobre el teorema de Pick; donde, desarrollan estrategias didácticas para la construcción de la fórmula de Pick con el propósito de aproximar el área de regiones poligonales sencillas. En su estudio realizan procesos de generalización en la búsqueda del teorema de Pick, por esta razón estudiamos los procesos dispuestos como un antecedente para nuestro modelo, la descomposición genética.

Por otra parte, hemos considerado pertinente que cada problema del taller, aborde diferentes perspectivas en los procesos de generalización para las técnicas de conteo que involucran planos figurales constructivos. En el segundo desafío de la situación 2, trataremos en el geoplano el concepto de área de figuras poligonales, en particular lo que se denomina la fórmula de Pick, la cual apareció en libro "Mathematical Snopshots" que recuperó el trabajo de Pick que había sido publicado en 1899.

La fórmula de Pick relaciona el área de un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras con el número de puntos en su interior y en su borde. Existen dos versiones de ella, la primera relaciona sin puntos en el interior y la segunda con puntos en el interior.

Sea *B* el número de puntos en el borde del polígono, entonces el área *A* del polígono se puede calcular a partir de la fórmula: $A = \frac{B}{2} - 1$. Por otra parte, al considerar puntos interiores se tiene que: Sea i el número de puntos interiores del polígono y B el número de puntos en el borde del polígono, entonces el área A del polígono se puede calcular a partir de la fórmula: $A = i + \frac{B}{2} - 1$.

Algunas precisiones necesarias, para calcular algunas áreas, debemos aclarar que trabajaremos sólo con polígonos que no se intersectan a sí mismos, los cuales se llaman *simples*. En nuestro geoplano los únicos vértices admisibles para todos los polígonos que construyamos, serán los puntos. Como calcular el área de un polígono sin puntos interiores, las estrategias esperadas para la generalización son:

Cuadricular la figura y contar los cuadros en su interior, por ejemplo Figura 7.

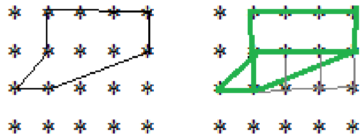


Figura 7. Separar la figura en 3 partes.

Bajo esta estrategia, se separa la figura en tres partes: un rectángulo de área 3, un triángulo de área igual a la mitad del área de un cuadrado unitario, y un segundo triángulo, cuya área se calcula separándolo en tres partes mediante segmentos verticales, donde la parte de la izquierda y la de la derecha se complementan para formar un cuadrado unitario, mientras que la parte central tiene área ½, de modo que el área de la figura original está dada por la suma 3 + ½ + 1 + ½ = 5. Es posible reescribir esta suma de la siguiente forma: $(3\times1)+\left(1\times\frac{1}{2}\right)+\left(3\times\frac{1}{2}\right)=5$, la que describe como se calculan las áreas de cualquier polígono.

Una segunda estrategia, es completar la figura mediante figuras conocidas, por ejemplo Figura 8:

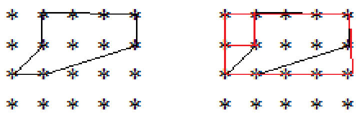
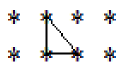
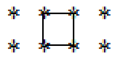
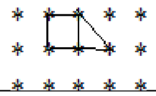
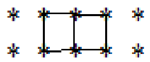
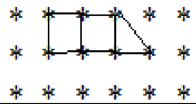
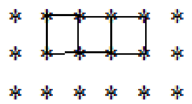
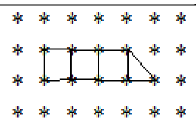


Figura 8. Completar mediante figuras conocidas.

Aquí, la figura inmediatamente anterior, es encerrada en un rectángulo, cuya área es 8. A dicha área le restamos el área de un cuadrado unitario y el área de dos triángulos. El primer triángulo es la mitad de un cuadrado unitario, y por tanto tiene área ½; el segundo es la mitad de un rectángulo de área 3, de modo que el triángulo tiene área 3/2; así, el área es $8-1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=5$.

Bajo las estrategias antes escritas es posible reconstruir la fórmula de Pick para el cálculo del área de polígonos en un geoplano, pero queremos una descripción en términos que facilite su construcción como un proceso recursivo de generalización, para ello la descomposición genética propuesta a partir de acciones sobre ciertas construcciones mentales objeto estará dirigida por las siguientes preguntas: ¿Cuál es el área de un polígono de n puntos en la orilla y ninguno al interior? ¿Cuál es el área de un polígono de n puntos en la orilla y m en su interior?

La Propuesta desde la perspectiva teórica de APOE

Figura	Número de puntos	Área
Por ejemplo 	3	1/2
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
…	…	…
	n	

Situación 3

El Desafío

Considera la siguiente situación.

En el siguiente modelo de circunferencia verde, se posiciona una ficha azul alrededor de ella, como aparece en la Figura 9.

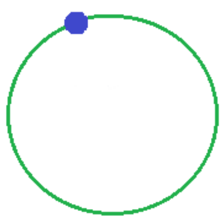


Figura 9. La situación.

Pregunta 1.- ¿De Cuántas maneras puedes posicionar esta ficha?
Pregunta 2.- Si, en la situacion anterior consideramos dos fichas,¿De cuántas maneras puedes posicionar estas fichas?

Pregunta 3.- Completa la siguiente tabla.

Número de fichas	**De cuántas maneras puedes posicionar estas fichas?**
1	
2	
3	
4	
5	
.	
.	
n	

Evidencias obtenidas de la Situación 3

Se planteó el desafío anterior a estudiantes universitarios de primer año, sin que hayan tenido una aproximación anterior al tema, ellos evidenciaron en sus respuestas, elementos externos a las variables matemáticas adecuadas para resolver el problema, entre las cuales se encuentran: problemáticas de abstracción de los elementos en juego, como considerar las cualidades físicas de los objetos a posicionar (tamaño, espesor, etc.), problemas con el sistema referencial. Un ejemplo de ello se aprecia en la Figura 10, los estudiantes que respondieron de esta forma constituyen una evidencia de las problemáticas antes señaladas. Desde la descomposición genética, podemos decir que la construcción mental de sistema referencial no es un esquema.

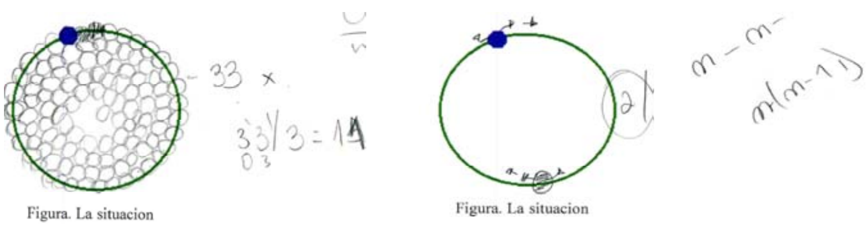


Figura 10. Producciones de los estudiantes de la Universidad 2.

El Problema y su análisis

El objetivo de esta actividad es proponer un análisis de un problema con elementos ordenados y permutados en un contexto circunferencial.
En este campo, sus particularidades y restricciones respecto de sus métodos y objetos de estudio. Específicamente; el problema está asociado al conjunto de los números naturales y axiomas de Peano, y a un clásico problema de conteo que considera establecer ordenamientos y permutaciones. La permutación puede estar referida a un arreglo con ordenamiento rectilíneo o, alternativamente, circular. Se considera que una permutación circular es una permutación que se aplica a conjuntos ordenados sobre una circunferencia, es decir, que no tienen principio ni final. Así; el uso de la noción de orden en este contexto matemático exige depurar el contexto

distinguiendo sólo los elementos que son pertinentes al problema, lo que tensiona su resolución, y entonces surge una problemática que puede ser abordada desde la Didáctica.
El problema de la situación 3 que hemos establecido en este taller, es un clásico al interior de las unidades que tratan el saber asociado al conteo en matemática discreta, y hay diferentes registros de ello.

- *Siete muchachos forman una ronda. ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar en círculo?* (Vilenkin, 1972, p. 26).
- *Si seis personas, designadas como A, B, C, ... , F, se sientan entorno de una mesa redonda, ¿cuántas disposiciones circulares diferentes son posibles, si las disposiciones se consideran iguales cuando una puede obtenerse de la otra mediante una rotación?* (Grimaldi, 1997, p. 11).
- *Consideremos el alfabeto castellano reducido a 21* consonantes (no incluimos la ch, la ñ, ni la ll) y con 5 vocales (a, e , i, o, u). Suponga ahora que colocamos, por ejemplo, las letras del alfabeto en un arreglo circular (figura circunferencial constituida de 26 letras). Demuestre que debe haber 5 consonantes consecutivas en un arreglo de ese tipo. (Ross & Wright, 1990, p. 220).
- ¿De cuántas maneras se pueden sentar ocho personas alrededor de una mesa si dos formas se consideran la misma cuando una se puede obtener de la otra mediante una rotación? (Ross & Wright, 1990, p. 327).
- Encuentre las m formas en que 7 personas pueden sentarse: a) En una fila de sillas; b) alrededor de una mesa redonda (Lipschutz, 2009, p. 98). ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas alrededor *de una mesa redonda*? (Spiegel & Moyer, 2007, p. 295).

Entonces después de prestar atención a los problemas anteriores, el desafío se plantea para obtener el número de arreglos diferentes en que puede(n) posicionarse 1, 2, 3, 4, ... , *n* objetos alrededor de un círculo, sin que importe la posición absoluta de los objetos en el círculo, advirtiendo la posición relativa entre los objetos, es decir, dos permutaciones circulares serán iguales si la posición relativa entre los n objetos es la misma, aunque la posición absoluta entre ellos sea diferente.
En el caso particular de la situación 3, el enfoque APOE también otorga una base teórica para analizar la forma en que se constituye la generalización en el conteo de situaciones que se interpretan a través de representaciones figurales no poligonales, las que construyen otros conceptos matemáticos y estudiar cómo ellos evolucionan en la mente de los estudiantes es todo un desafío.

A Modo de Conclusión

El desarrollo de este taller –a través de estas tres situaciones– permite construir un modelo explicativo de los procesos de generalización como estrategia cognitiva para el aprendizaje de técnicas de conteo mediante una descomposición genética, que desde acciones sobre construcciones mentales objetos posibilitan la generalización como proceso cognitivo necesario en la matemática.

Referencias y bibliografía

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education* New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. Research in Collegiate Mathematics Education, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Dubinsky, E. y W. Fenton (1996), *Introduction to Discrete Mathematics with ISETL*, Nueva York, Springer Verlag.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Grimaldi, R.P. (1997). *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. México: Addison Wesley Iberoamericana, S.A.

Kú, D., Trigueros, M. & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática,* 20(2), 65-89.

Lipschutz, S. (2009). *Matemáticas Discreta*. México: McGraw Hill.

Ross, K.A. & Wright, Ch.R.B. (2009). *Matemáticas Discreta*. México: Prentice Hall.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2009). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. *Educación Matemática*, 21 (1), 91-117.

Sierra, T. & Rodriguez, E. (2012). Una propuesta para la enseñanza del número en la Educación Infantil. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 80 (12), pp. 25-52.

Stake, R.E. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Barcelona: Labor.

Spiegel, M.R. & Moyer, R.E. (2007). *Algebra Superior*. México: McGraw Hill.

MINEDUC. (1998). Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media Ed. MINEDUC , Santiago de Chile.

Verdugo, J.; Briseño, L.; Vázquez, R.; & Palmas, O. (2000). *Área de figuras en el geoplano*. [en línea]. México: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias / UNAM, Septiembre de 2014. Disponible en: <http:// www.cneq.unam.mx>.

Vilenkin, N. (1972). *¿De cuántas formas?: Combinatoria*. Moscú: MIR.