



## Utilidad de los recursos didácticos, para desarrollar el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, desde la situación “Recorrido por el mundo geométrico”

Oscar Javier González **Pinilla**

Estudiante Maestría en Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Colombia

oscarmateud@gmail.com

Camilo Arévalo **Vanegas**

Estudiante Maestría en Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Colombia

kmilo741a@gmail.com

### Resumen

Se pretende dar a conocer una experiencia de aula realizada en un colegio de Bogotá durante las clases de geometría, con miras a fortalecer el pensamiento espacial en estudiantes de segundo de primaria. Para ello se establece una propuesta que está fundamentada desde los aportes teóricos de Linda Dickson (1991), al hablar del estudio de los objetos tridimensionales, analizando sus propiedades y características físico-visuales para proporcionar experiencias tangibles del mundo; desarrollando así la habilidad espacial en los estudiantes, que reconocerán la representación bidimensional del mundo físico que nos rodea a través de material manipulativo-tangible y grafico-textual (Godino, 2006), proporcionando experiencias de aprendizaje efectivas. Ésta metodología de enseñanza se enmarca en una situación problema fundamental (Brousseau, 1986), en la que el grupo de estudiantes deberá viajar por cinco países, para reconocer cinco sólidos relacionados con las obras y maravillas de cada país, para finalizar con una obra de arte que relaciona los sólidos.

*Palabras clave:* Enseñanza de la geometría, Pensamiento espacial, Materiales manipulativos, Niveles de Van Hiele, Habilidades.

### Planteamiento del problema

Esta experiencia tiene como principal objetivo reivindicar al aula de matemáticas como un espacio de experiencias reales gracias al uso de recursos didácticos que faciliten la enseñanza y aprendizaje de la geometría en estudiantes de educación inicial<sup>1</sup> desde la propuesta de Godino (2006) y su clasificación de los materiales didácticos en manipulativos tangibles, gráfico textuales y ayudas al estudio; por lo que se pretende un análisis exhaustivo sobre las funciones y las ayudas que brindan en pro del desarrollo de nuevos conocimientos geométricos en los estudiantes. Esto a partir de la implementación de una situación fundamental desde lo planteado por Brousseau (1986) en su teoría de las situaciones didácticas, donde el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno debe descubrir. El reto estaba en planear, diseñar y ejecutar una propuesta de enseñanza de la geometría, enfocada a desarrollar el pensamiento espacial, la enseñanza de los sólidos geométricos y las figuras planas en estudiantes de segundo desde los aportes de Linda Dickson (1991) para conllevar la enseñanza de la geometría espacial, empezando desde el estudio de los objetos tridimensionales, analizando sus propiedades y características físicas-visuales para proporcionar el camino hacia el aprendizaje de las representaciones bidimensionales de estos objetos tridimensionales, desarrollando así el pensamiento espacial al reconocer en el contexto del estudiante, el mundo geométrico que lo compone.

Ahora bien, cabe mencionar que el pensamiento espacial, se toma como el proceso mediante el cual, se construyen y manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, sus relaciones, transformaciones y diversas representaciones. Por otro lado los sistemas geométricos se encargan de hacer énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, a través de la exploración activa.

Los lineamientos curriculares de matemáticas, particularmente los que aluden a las representaciones geométricas mentales, deben promover la exploración por parte del estudiante, donde la comunicación oral y escrita de ideas matemáticas y la verificación, negociación y validación de sus afirmaciones sea puesta en juego dentro de procesos de socialización (MEN, 1998). Sin embargo, su aprendizaje se ve cada vez más afectada porque se centra en representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales que se usan ocasionalmente para resolver algunos problemas, además de que no se toman en cuenta los procesos de argumentación que se ponen en juego dentro de procesos de socialización en el aula de clases.

### **Fundamentación teórica**

En la enseñanza de la geometría, los sólidos y sus propiedades se manejan sin mayor profundidad, de este modo se privilegia lo bidimensional sin llegar a comprender y establecer el paso de lo bidimensional a lo tridimensional y viceversa. En los estándares de matemáticas se reconoce esta problemática y la importancia de desarrollar una “geometría activa”, en la que se privilegie

“la exploración de figuras mediante el movimiento, empezando por el propio cuerpo, como cuando el niño recorre la frontera de una figura y pasando por el que se aplica a los objetos físicos, para estudiar los efectos que se producen en la figura que comportan y las relaciones entre productos de estos movimientos y de manera muy parcial, entre los mismos movimientos” (MEN, 1998).

---

<sup>1</sup> Estudiantes de grado segundo del colegio San Juan de los Pastos, Bogotá, Colombia (2014).

Las propuestas de varios autores frente al aprendizaje de la geometría espacial en niños preescolares, dicen que debe hacerse partiendo de las figuras tridimensionales y su comparación con los objetos físicos de la realidad, hacia la geometría bidimensional trabajada como atributos de la geometría tridimensional o a lo que Linda Dickson (1991) se refiere cuando habla de la representación bidimensional del espacio tridimensional. Es así como se hace alusión a autores como Lappan y Wibter (1979), quienes afirman que:

“A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que se proporcionan a los estudiantes son bidimensionales, además nos valemos de libros matemáticos que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales, tal uso de dibujos de objetos le supone al niño una dificultad adicional en el proceso de comprensión. Es empero, necesario que los niños aprendan a habérselas con las representaciones bidimensionales de su mundo”. (Citado en L. Dickson p. 48)

Para que los estudiantes vayan identificando las características bidimensionales que tienen los objetos tridimensionales, debe empezarse por la interacción y la percepción del mundo físico que nos rodea, donde *“la percepción es el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos y la representación es una evocación de los objetos en ausencia de ellos”*. (Piaget, 1964, p.28); se pretende así que ellos construyan esquemas mentales del objeto cuando a este se le hacen transformaciones, es decir, acciones como rotar, trasladar, girar, ordenar, moldear, cortar, pegar etc. es aquí donde se hace imprescindible el uso de recursos didácticos para el estudiante.

### **Recursos didácticos**

En la enseñanza de las matemáticas y en lo que a nosotros concierne en el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial, es muy importante tener en cuenta los métodos que utilizan los maestros para lograr los propósitos educativos, así como los medios a los que acuden y que otorgan a los estudiantes para facilitar el proceso de aprendizaje en ellos. A continuación presentamos la clasificación que hace Godino (2006), a los recursos didácticos (Ver tabla 1):

Tabla 1

*Clasificación de los recursos didácticos Godino (2006, pp. 117-124)*

| <b>Instrumentos semióticos:</b> Son los medios por los cuales se logra mediatizar entre la acción de los sujetos ante el intento de resolver una situación-problema y el contexto en el cual se desarrolla.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Manipulativos tangibles</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <b>Gráfico-textuales-verbales</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <p>Objetos físicos que sirvieron para identificar características propias de los sólidos y que ponen en juego la percepción táctil. El estudiante tiene un acercamiento al objeto siendo esta acción o momento reflexivo, en el que se pueden construir conocimiento, ya que se identifican características del objeto y se ve la conservación de sus propiedades.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Sólidos contruidos por los mismos estudiantes</i></li> <li>• <i>Materiales para caracterizar propiedades del sólido</i></li> </ul> | <p>Aquellos recursos en los que se hace presente la percepción visual y/o auditiva, que básicamente en nuestra secuencia de actividades tenían por propósito generar y despertar el interés y la motivación por parte del estudiante hacia la búsqueda de nuevos conocimientos; además también ayudaban a que el estudiante se involucrara de forma activa y dinámica a la situación didáctica propuesta:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Videos e imágenes de los frecuentes viajes alrededor del mundo geométrico</i></li> <li>• <i>Guías e instrumentos</i></li> </ul> |

### **Diseño y metodología de investigación**

Diseñar actividades que despierten el interés y la motivación de adquirir nuevos y útiles conocimientos no es tarea fácil. De este modo “Recorrido por el mundo geométrico” es la excusa perfecta para cautivar la atención de los estudiantes y proporcionarles experiencias fascinantes e innovadoras en el estudio de las matemáticas, que desde la propuesta de Guy Brousseau (1986), quien propone que

*“...el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno debe descubrir...”*

El diseño de la situación y la evaluación del impacto y pertinencia del uso de recursos didácticos se evidenciará a partir de las categorías de análisis del modelo Van Hiele (1984) y Hoffer (1981), que pretenden establecer que la geometría es aprendida por una secuencia de niveles del pensamiento, el cual se caracteriza por ser progresivo y ordenado, donde solo al dominar o alcanzar un nivel se puede pasar al siguiente. Van Hiele (1984), plantea cinco niveles para la enseñanza de la geometría; *Nivel 0*, visualización o reconocimiento, *Nivel 1*, análisis, *Nivel 2*, Ordenación o clasificación, *Nivel 3*, Deducción formal y *Nivel 4*, Rigor.

Atendiendo al intervalo de edad en el que se encuentran los estudiantes (6-8 años), podemos ubicarlos, según el modelo Van hiele en el nivel de reconocimiento, con las cinco habilidades que plantea Hoffer (1981), y que deberían ser desarrollados por los niños de esta edad (Ver tabla 2):

Tabla 2:

Modelo Van Hiele (1984) con aportes de Hoffer (1981) para la enseñanza de geometría.

| VAN HIELE                      | HABILIDADES                                                                                                                                                                                                       | LO QUE SE LOGRÓ DESDE LA SITUACIÓN PRESENTADA                                                                                                                                               |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Visualización o Reconocimiento | <b>Visual:</b> La capacidad de crearse representaciones mentales a través de la visualización de objetos.                                                                                                         | <ul style="list-style-type: none"> <li>Reconocer diferentes figuras de un dibujo</li> <li>Reconocer información contenida en una figura</li> </ul>                                          |
|                                | <b>Verbal:</b> la habilidad de comunicación donde el estudiante da a conocer la información contenida en los objetos geométricos que ha logrado interiorizar.                                                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Asociar el nombre correcto con una figura dada</li> <li>Interpretar frases que describen figuras</li> </ul>                                          |
|                                | <b>Dibujo:</b> Tras crear las imágenes mentales a partir de la visualización de objetos debe traducirlas a representaciones externas y a partir de ellas crear representaciones internas de conceptos matemáticos | <ul style="list-style-type: none"> <li>Hacer dibujos de figuras interpretando las partes</li> </ul>                                                                                         |
|                                | <b>Lógica:</b> pretende desarrollar en el estudiante el poder de argumentación lógica, sus propias justificaciones y formulaciones.                                                                               | <ul style="list-style-type: none"> <li>Darse cuenta que hay diferencias y similitudes entre figuras</li> <li>Comprender la conservación de las figuras en diferentes situaciones</li> </ul> |
|                                | <b>Aplicada:</b> Pretende que al enfrentarse a una situación problema, el estudiante utilice sus propias estrategias de solución utilizando las demás habilidades                                                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar formas geométricas bidimensionales en objetos físicos</li> </ul>                                                                         |

## Resultados

### Descripción de la experiencia

En cada uno de los países a los que se viajó (Ver figura 1) debería aprenderse algo nuevo referente a la geometría, pues la idea primordial era mostrarles construcciones en diferentes países asociadas a algunos sólidos geométricos, para que finalmente desarrollarán la capacidad de descomponer los sólidos trabajados en sus propiedades bidimensionales, y desde allí envolverlos y trabajar sobre sus propiedades y características a través del material proporcionado.



Figura 1. Países visitados en el recorrido geométrico

Para simular el viaje se hacía uso de material gráfico-textual (Godino, 2006) como lo son Videos e imágenes de los países y construcciones de cada lugar (Ver figura 2). Estos recursos grafico-textuales ayudaban a involucrar al estudiante en la situación propuesta, los constantes viajes que hacíamos a países lejanos para mirar las imágenes de construcciones arquitectónicas en forma de sólidos, generaban entusiasmo para el trabajo activo con los recursos tangibles.



Figura 2. Estudiantes observando el video del viaje a Egipto donde conocieron un poco de su cultura y las maravillosas pirámides de Guiza

Se recurría a recursos tangibles y manipulativos durante todas las sesiones, los cuales correspondían a sólidos contruidos, realizados por los mismos estudiantes (imagen 2) y el objetivo principal era el motivar al estudiante a la exploración táctil y visual de los mismos para que proporcionaran las primeras informaciones sobre las características y algunas de sus propiedades, siguiendo la idea de Jean Piaget (1964) quien hace distinguir este proceso y dice: *“la percepción es el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos, para que posteriormente la representación sea una evocación de los objetos en ausenta de ellos”* (Ver figura 3).



Figura 3. Estudiantes interactuando con el material tangible, construyendo sólidos y caracterizando sus propiedades físicas, vértices, aristas y caras

| figura | Bordes (aristas) | Puntas (vértices) |
|--------|------------------|-------------------|
|        | 2                | 4                 |
|        | 3                | 7                 |



Figura 4. Estudiantes caracterizando las propiedades físicas, vértices, aristas y caras de los sólidos

El objetivo después del reconocimiento de sólidos y su caracterización, se pretendía que los estudiantes estuvieran en la capacidad de descomponer los sólidos en sus propiedades

bidimensionales (Ver figura 5), logrando así evidenciar las formas planas que componían a un sólido.

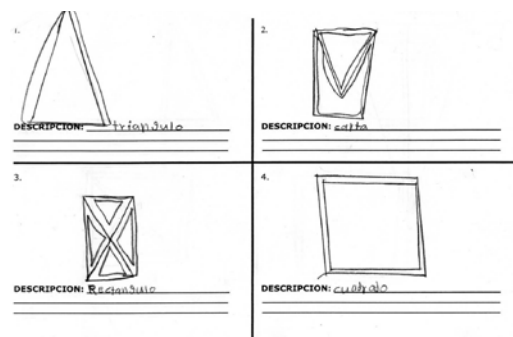


Figura 5. Representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales realizadas por los estudiantes “la pirámide desde sus diferentes perspectivas”

Esta actividad que corresponde a la última sesión, se desarrolló durante el viaje a Rusia, donde el aula de clase se convirtió en una galería de arte geométrico, simulando el arte abstracto geométrico del siglo XVIII donde se usaban configuración de figuras planas para crear valiosas y bonitas obras. En ésta sesión el estudiante debía crear su propia obra pero sin el uso de pincel, sino con los mismos sólidos anteriormente trabajados durante los viajes a los demás países, pues debían usar cada una de las caras planas de los sólidos para simular un sello y plasmarlas sobre una cartulina evidenciando las propiedades bidimensionales de los sólidos que ya habían trabajado (Ver figura 6).

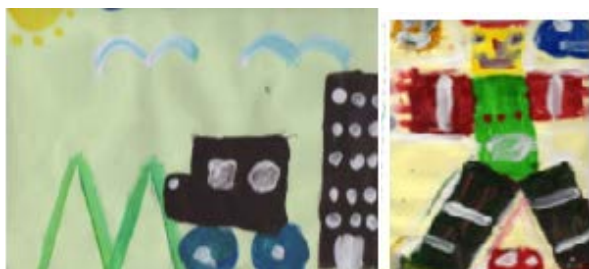


Figura 6. Estudiantes usando los sólidos geométricos como sellos para crear obras de arte. Reconocen la composición bidimensional de los objetos tridimensionales

Así creaban sus obras con figuras planas y a la par comprendían la composición bidimensional de objetos tridimensionales.

### Análisis de los resultados

La manipulación y visualización de los sólidos como lo plantea el modelo Van Hiele ayudó a reconocer algunas de sus características físicas; pues los estudiantes hacían alusión a sus bordes y sus puntas, realizaban conteos para saber cuántas puntas poseía cada sólido, cuantas caras la constituían, etc.

En cuanto a las características físicas de un sólido como las aristas, ellos empezaban a asociar esas propiedades según lo que percibían; por ejemplo al mostrarles los vértices de la pirámide decían que ese nombre “vértice” era muy raro que preferían llamarle “*puntas*”, lo que ayudo a su mejor reconocimiento y posterior conteo para saber cuántas poseía cada sólido.

En cuanto a las aristas, que también lo consideraban un nombre muy raro y no lo relacionaban con nada, reemplazaban este nombre como los “bordes” que se podían sentir con los dedos y finalmente las caras las reconocían como aquello sobre lo cual la pirámide podía quedar de pie, pues si intentas ponerlo de pie sobre una punta se caía, igualmente si intentas pararla sobre el borde, el único lugar sobre queda de pie es sobre sus caras planas. En este caso, es evidente que los estudiantes logran un desarrollo de la habilidad verbal y de comunicación, donde crean sus propias reglas para nombrar las propiedades del sólido y lograr una comprensión conjunta sobre los objetos de estudio, como cuando aludían a la esfera que no tiene caras planas ya que por donde quieras que lo colocas sobre una superficie plana nunca se pone de pie fijamente.

Finalmente gracias a estas características que ellos mismos de manera curiosa les atribuían a los sólidos, lograban realizar los conteos de cada uno de los vértices, caras y aristas lo que no se dificultó en ningún sentido. Reconocían igualmente la representación bidimensional de los sólidos, pues identificaban figuras como triángulos, cuadrados y círculos en las pirámides, cilindros y paralelepípedos, dibujándolas de acuerdo a la cantidad.

### **Conclusiones y reflexiones finales**

Los materiales manipulativos tangibles ayudan a la comprensión de conceptos gracias a que hacen una conexión con el estudiante, permitiéndole a partir de situaciones nuevas para él, adquirir nuevos conocimientos, donde el material por sí mismo no es nada, lo es cuando se le da un enfoque por parte del maestro para tratar conceptos y llegar a la concepción en este caso de la geometría espacial, así la enseñanza y el aprendizaje se dota de un carácter dinámico y comprensible para el estudiante.

Uno de los aspectos que se consideran valiosos en la práctica, es hacer que los estudiantes comprendieran la importancia de las matemáticas en la vida cotidiana. Llevarlos a un proceso en el cual generan un pensamiento crítico y flexible, gracias a las situaciones en las que se veían involucrados y a las decisiones que tomaron para poder solucionarlas.

Es importante hacer mención a la importancia que tienen los recursos gráfico-textuales como lo son los videos y las imágenes interactivas, haciendo uso de nuevas tecnologías, ya que en la educación matemática actual no se tienen muy en cuenta y por lo que se logró en esta experiencia de aula, se puede concluir que son recursos agradables e interesantes a la vista del estudiante, gracias a éste, el estudiante crea nuevos interés por los procesos de aprendizaje, motiva el trabajo activo y lo involucran en una situación donde debe acceder a nuevos conocimientos gracias a la propia acción.

Uno de los aspectos que llama la atención, es que la conceptualización planteada por los estudiantes, está acompañadas por gestos y palabras, del lenguaje cotidiano del estudiante, hasta que los conceptos sean validados o institucionalizados por los estudiantes, para una futura valoración de definiciones y simbolismos formales.

### **Referencias Bibliográficas**

- Brousseau, G. (1997). *Teoría de las situaciones didácticas de las matemáticas*. Kluwer Académica Publisher. Francia.
- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Francia. Universidad de Burdeos.

- Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: M.E.C. & Labor
- Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de Fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele*. Práctica en Educación Matemática. Ediciones Alfar, Sevilla.
- Godino, J. (2009). *Uso de material tangible y gráfico textual en el estudio de las matemáticas; superando algunas posiciones ingenuas*. Machado y Cois. Guimarães, Portugal.
- Hoffer, A. (1981). La geometría es más que demostración. *Notas de matemática* 29, Abril de 1990, 10-24
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Piaget, J. (2005). *La representación del espacio*. México: Reseña del libro *Reflexiones sobre la geometría y su enseñanza*. Correo del maestro y ediciones la vasija.
- Van Hiele, P.M. (1984). *Estructuras y visiones. Una teoría de la educación matemática*. Londres, academic press