Desenvolvimento do conceito de equação a partir da exploração do princípio da alavanca em balança de pratos

Eduardo **Sarquis** Soares
Campus Alto Paraopeba, Universidade Federal de São João Del Rei
Brasil
esarquis@gmail.com
Grace Marisa Miranda **de Paula**
Rede Municipal de Ensino de Ouro Branco, MG
Brasil
gracemarisa40@gmail.com

Resumo

A relevância de se aprender significado das equações é amplamente reconhecida e, no entanto, o tratamento desse conceito desafia os professores do ensino fundamental devido à sua inerente complexidade e correlatas capacidades cognitivas exigidas dos alunos. Algumas pesquisas sobre o assunto fornecem indicadores daquilo que se pode esperar dos aprendizes; outras identificam estratégias adotadas por professores no esforço de trabalhar o conceito. Nesta oficina, desenvolvemos uma proposta original de abordagem das equações a partir da exploração do princípio da alavanca associado à balança de pratos. Nos trabalhos práticos, os participantes poderão verificar como a proposta é apresentada aos estudantes. Serão exibidos episódios de um experimento registrado em vídeo com alunos do ensino fundamental. Os participantes serão convidados a analisar coletivamente tais episódios e avaliar eventuais avanços e questões associados à proposta didática apresentada.

Palavras chave: álgebra, ensino de equações, formação de professores, balança de pratos e equações.

Questões associadas ao ensino de equações

A proposta desta oficina foi formulada a partir de um trabalho de pesquisa que envolve professores do ensino fundamental do município de Ouro Branco, MG, Brasil. Esse grupo vem estudando e experimentando metodologias para o ensino de ciências e matemática com o intuito de obter um aprimoramento de seu trabalho. O grupo, composto por quatro profissionais, reúne-se semanalmente e desenvolve planejamentos conforme as necessidades apresentadas por cada participante. As aulas são compartilhadas por dois ou mais professores e são registradas em vídeo para posteriores análises. Aqui será apresentada uma análise sucinta de questões relativas ao ensino de equações e, posteriormente, será discutida uma metodologia proposta pelo grupo e já experimentada em duas ocasiões, uma em 2013 e outra em 2014, ambas envolvendo, de cada vez, uma turma de estudantes do sétimo ano do ensino fundamental.

Pode-se observar, em artigos separados no tempo, um certo consenso entre os pesquisadores quando reconhecem a necessidade de se compreender as equações para o desenvolvimento da aprendizagem da álgebra em geral (confere, por exemplo, Steinberg, Sleeman e Ktorza, 1990; MacGregor & Stacey, 1997; Huntley et al., 2007, Rittle-Johson et al., 2011, Andrews & Sayers, 2012). Todavia, a tarefa de ensinar equações, ou prover acesso aos fundamentos da álgebra, apresenta uma série de desafios e requer o desenvolvimento de competências específicas por parte dos professores. Importa que, durante o planejamento da ação didática, sejam levados em conta, por exemplo, aspectos do desenvolvimento cognitivo dos alunos e o que se pode esperar deles tendo-se em mente sua faixa etária e desenvolvimentos curriculares anteriores.

Importa também que o meio cultural de origem dos alunos seja considerado no planejamento, uma vez que, para alguns, a associação de imagens abstratas a expressões algébricas pode ser bem mais fácil do que para outros. Em alguns casos, por exemplo, a imagem de uma balança de pratos pode ser facilmente evocada com o objetivo de se compreender como o sinal de igualdade pode estar associado ao equilíbrio da balança. Acréscimos ou retiradas de pesos de um prato têm de ser compensados por acréscimos ou retiradas iguais do outro prato. Andrews & Sayers (2012), por exemplo, conduzem um estudo no qual acompanham três professores de países diferentes enquanto ensinam as primeiras lições sobre equações: na Finlândia, na Bélgica e na Hungria. Em todos esses casos, faz-se menção explícita à metáfora da balança e em nenhum deles a balança como objeto manipulável entra em cena.

Aqueles autores não discutem efeitos, nos alunos, associados à evocação da imagem da balança. No entanto, é preciso questionar a efetividade da utilização de tal imagem especialmente quando a cultura de origem dos alunos tende a facilitar a aprendizagem pela manipulação de objetos. É esse nosso caso, uma vez que desenvolvemos trabalhos com alunos oriundos de populações de camadas socialmente desfavorecidas. O grupo de professores foi unânime em reconhecer a necessidade de se proporcionar aos alunos oportunidades de manipulação de objetos nas aulas de matemática. No trabalho com equações, considerou-se que a evocação da balança como simples imagem não seria produtiva. Tal percepção advém da prática profissional. A título de exemplo, a professora que conduziu o trabalho sobre equações relatou que, ao falar para seus alunos do oitavo ano do ensino fundamental sobre semelhanças entre manipulações nas equações e tratamento de pesos em balança de pratos, nenhum deles soube reconhecer a que a professora estava se referindo. Contudo, a imagem da balança havia sido evocada no ano anterior como parte da abordagem sobre equações nas aulas de matemática.

A partir desse posicionamento dos professores, constatou-se a necessidade de se experimentar metodicamente uma atividade com a balança de pratos associada ao ensino de equações e verificar o que poderia ser obtido a partir dessa atividade. Mais adiante serão apresentados e comentados alguns tópicos do experimento realizado. Antes porém serão mencionados aspectos do desenvolvimento cognitivo dos sujeitos enquanto aprendem o conceito de equação, como podem ser encontrados na literatura acadêmica.

Desafios cognitivos para aquisição do conceito de equação

Basicamente são de quatro ordens os desafios cognitivos que precisam ser superados para uma compreensão mais profunda do conceito de equação (Andrews & Sayers, 2012): expandir o significado do sinal de igualdade, distinguir equações aritméticas de equações algébricas, associar equações à modelagem de problemas com enredo e dominar maneiras de conferir resultados obtidos.

Em fases preliminares da aprendizagem, o sinal de igualdade tende a ser interpretado com o mesmo significado que lhe é atribuído na execução de operações, ou seja, como uma indicação para que se realize a operação que se encontra à esquerda. Warren & Cooper (2005) indicam quatro interpretações usuais: o sinal de igualdade como resultado de uma operação, como indicação de igualdade entre quantidades (5-1 = 7-3), como afirmação de que algo é verdadeiro para todos valores de uma ou mais variáveis (x + y = y + x) e como a afirmativa que associa um valor a uma nova variável (a + b = c). Parece razoável, então, aceitar a ideia de que essa diversidade de significados para o mesmo sinal seja conquistada gradativamente pelos aprendizes.

Equações aritméticas são aquelas em que o número desconhecido (a variável) aparece em apenas um lado da igualdade. Nesse caso, operações realizadas apenas com números permitem que se descubra o valor da variável. Nas equações algébricas, a variável aparece em ambos os lados da igualdade. Isso exige que se manipule a variável para que a solução seja encontrada. A variável tem de ser reconhecida pelos aprendizes como uma entidade matemática, o que constitui uma exigência de desenvolvimento cognitivo. Pesquisadores debatem dificuldades encontradas na compreensão de equações algébricas: tais dificuldades deveriam ser interpretadas como sinais de obstáculos cognitivos (posição prevalecente, adotada por Christou & Vosniadou, 2012, por exemplo) ou surgiriam devido a lacunas no próprio ensino oferecido pelos professores (posição de Filloy & Rojano, 1989).

A aprendizagem de equações supõe dois aspectos interdependentes – a manipulação de símbolos e a atribuição de significados a esses símbolos. Os significados dependem de associações entre situações contextualizadas e a representação matemática de problemas associados a essas situações. Assim, a modelagem de um problema requer que o aprendiz compreenda como símbolos algébricos representam elementos constituintes desse problema e podem conduzir à sua solução. A solução, por seu lado, depende da manipulação adequada dos símbolos; daí a interdependência dos dois aspectos.

Quanto à conferência de resultados obtidos, ao mesmo tempo em que é reconhecidamente necessária, os pesquisadores, de uma maneira geral, constatam uma grande dificuldade em estimular os estudantes a adquirirem essa prática (Andrews & Sayers, 2012, p. 478).

A metodologia desenvolvida para a apresentação do conceito de equação levou em conta os desafios acima apresentados e será apresentada em seguir.

Princípio da alavanca, balança de pratos e desenvolvimento de registros

Prós e contras a utilização da balança de pratos no ensino inicial de equações são discutidos na literatura acadêmica (confere em Andrews & Sayers, 2012, p.479). Há os que defendem a balança como metáfora bastante próxima das equações, dada a necessidade de equilíbrio entre os dois pratos, os quais representariam os dois lados da equação. Há também os que criticam a utilização desse recurso sob alegação de que balanças de prato não são mais parte do cotidiano dos alunos, hoje mais acostumados com balanças eletrônicas. Alega-se, também, que as balanças de pratos não permitem investigações sobre números negativos. Há que se considerar ainda que, como foi mencionado acima no depoimento da professora, se há a pretensão de que os alunos associem a ideia da manipulação das equações com a imagem da obtenção do equilíbrio em balanças de prato, essa associação pode facilmente se perder na memória, especialmente quando as balanças aparecem apenas virtualmente.

O grupo de trabalho que experimentou a utilização da balança como recurso tomou como princípio a necessidade de se levar balanças reais para a sala de aula em vez de apenas se fazer menções a elas. Além disso, decidiu-se pela construção de uma balança com 4 ganchos para fixação de pesos de cada lado da haste. Foram produzidos conjuntos de 16 pesos de madeira. O nome mais adequado seria “massas de madeira”, porém usualmente usa-se o termo “peso” quando seria mais correto usar o termo “massa”. Cada grupo recebeu, além de uma balança, um conjunto de pesos em 4 tamanhos diferentes, correspondentes a 4 massas com quantidades proporcionais a 1, 2, 3 e 4 (figura 1 e detalhes da construção no anexo 1).

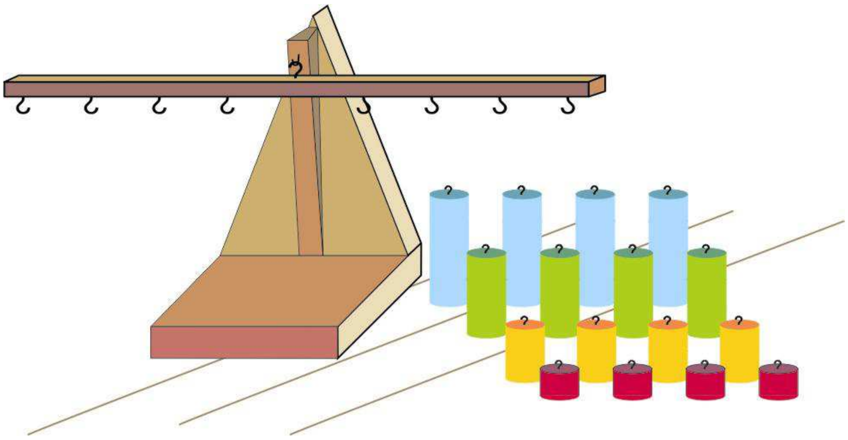

Figura 1. A balança e os pesos.

Os ganchos foram fixados em distâncias ao centro da haste proporcionais a 1, 2, 3 e 4. Com isso, ampliaram-se as possibilidades de utilização da balança como recurso. Nas balanças convencionais, o equilíbrio é afetado apenas a partir das massas depositadas em cada prato. Nessa outra balança, duas grandezas passam a influenciar o equilíbrio: o peso e a posição na qual ele é aplicado. Então, considerando como A e B os lados da haste, “p” como peso e “d” como a distância do ponto de aplicação do peso ao centro da haste, o equilíbrio acontece quando o somatório da multiplicação p x d todos os pesos afixados no lado A é igual ao mesmo somatório aplicado no lado B. Isso decorre da aplicação direta do princípio da alavanca: a tendência à rotação da haste em qualquer sentido (que poderíamos associar ao conceito de torque) é controlada pela aplicação das forças (pesos) e a ação de cada força depende da distância entre seu ponto de aplicação e o ponto de apoio da haste.

Não é necessário que os alunos compreendam os fundamentos físicos que subjazem a situação de equilíbrio à balança. Devidamente guiados pela professora, eles são capazes de verificar experimentalmente que a condição de equilíbrio não depende somente da colocação de pesos em cada lado da haste, mas que também o gancho no qual se dependura o peso tem influência nesse equilíbrio. A atividade com alunos supõe, portanto, a produção de desafios com o objetivo de fazê-los compreender essa dupla dependência para estabelecimento da condição de equilíbrio. É possível, por exemplo, lançar desafios como: equilibrar o peso 1 de um lado da haste com o peso 4 do outro lado da haste. Ainda que seja por meio de uma série de tentativas, os alunos acabam verificando que o equilíbrio se estabelece quando o peso 1 é aplicado à posição 4 e, inversamente, o peso 4 é aplicado à posição 1 do outro lado da haste (figura 2).

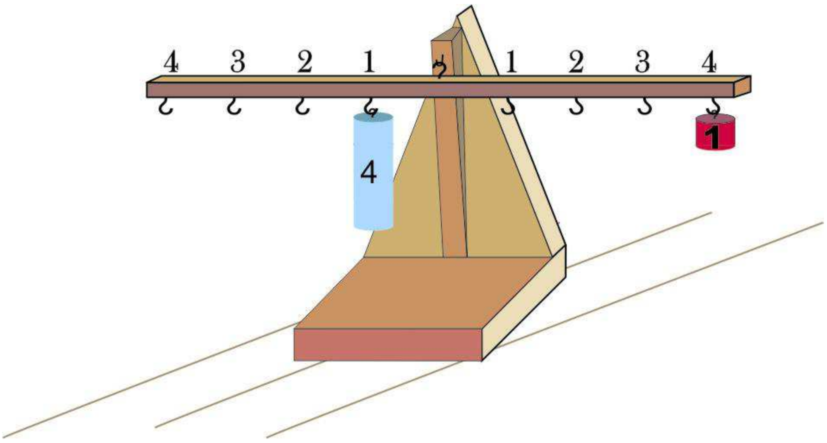

Figura 2. O princípio da alavanca verificado de maneira prática.

A condição de equilíbrio formalmente expressa pode ser ensinada pela professora no momento em que ela considerar apropriado. Qualquer situação obtida na balança pode ser expressa por meio de um desenho no qual as quadrículas representam as posições nas quais os pesos são colocados e os números representam os pesos colocados nessas posições. Uma barra colocada entre as quadrículas representa a separação da haste em dois braços (figura 3).

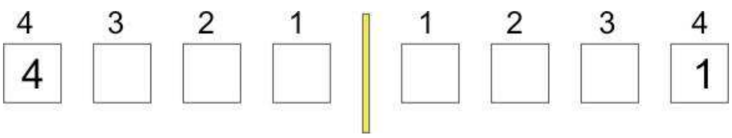

Figura 3. Representação de uma situação de equilíbrio na balança.

Essa representação pode evoluir para desafios, nos quais o aluno deve encontrar o valor de um peso desconhecido, como na figura 4.

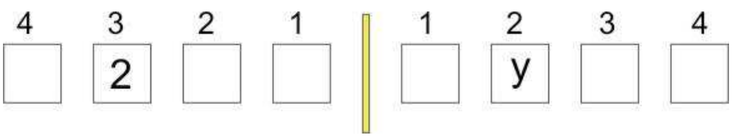

Figura 4. Representação de um desafio.

Os desafios vão evoluindo com graus de dificuldade cada vez maiores. Podem ser apresentadas condições nas quais valores inteiros não permitem obter o equilíbrio, o que conduz à solução por decimais. A representação da balança pode se ampliar, aumentando-se o número de quadrículas de cada lado, agora representando balanças que teriam mais de 4 ganchos. Uma outra evolução no grau de dificuldade consiste em se produzir desafios com variáveis em ambos os lados da representação da haste. Todos esses desafios abrem espaço para que se apresentem aos alunos oportunidades de aprender como resolver equações aritméticas bem como equações algébricas. Em determinado momento, essa representação vai sendo substituída pela representação algébrica convencional. Um caso particularmente interessante corresponde à introdução de números negativos em desafios como este representado na figura 5.

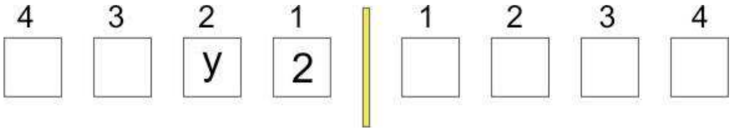

Figura 5. Introdução do número negativo em um desafio.

Em um caso como esse evidencia-se o fato de que nenhum peso até então conhecido, mesmo que repartido em partes menores, pode resolver o desafio. No entanto, é possível discutir duas soluções. A primeira, mais fácil de ser visualizada corresponde à ideia de se imaginar que peso poderia ser colocado na posição 2 do lado direito da balança e que produziria o equilíbrio. Então, o sinal negativo ganha um significado: ele indica que o número a ser substituído pela letra “y” provocaria o equilíbrio representando um peso colocado do outro lado da haste. Em uma solução alternativa, o número a substituir o “y” equivaleria a uma força que promoveria o equilíbrio da balança. A diferença entre essa força e o peso dos toquinhos de madeira se dá pelo fato de que essa força teria de ser aplicada no sentido contrário ao peso, ou seja, na vertical apontando para cima. Essa percepção mostra-se bem mais complexa do que a primeira alternativa. De todo jeito, essa situação promove significados para o número negativo, o que contraria críticas endereçadas à utilização da balança como recurso para se aprender a solucionar equações.

As situações ilustradas acima permitem que se explore com os alunos significados para o conceito de equação, assim como alternativas de solução de situações diversificadas, com introdução de soluções baseadas em números decimais bem como de outras baseadas em números negativos. Apesar de se verificar que situações com a balança podem ser propostas em enredos de problemas, há que se reconhecer que esse é apenas um começo para se enfrentar o desafio de trabalhar a modelagem de problemas diversificados com representações algébricas. Esse assunto não será plenamente explorado nesta apresentação porque exige um trabalho de maior duração que o tempo de uma oficina.

A ideia de desenvolver a oficina aqui proposta consiste, basicamente em apresentar aos participantes oportunidades de compreender a proposta, experimentar situações com balanças, propor atividades e observar alguns episódios com vídeos de aulas efetivamente lecionadas com utilização desse recurso.

Metodologia da oficina

1. Apresentação inicial dos desafios enfrentados quando se ensina equações.
2. Exploração da balança e suas possibilidades – princípio da alavanca envolvido na balança e em outros mecanismos.

3. Desenvolvimento de registros.
4. Convite aos participantes no sentido de propor desafios relacionados à utilização da balança e o ensino de equações.
5. Mostra de vídeo com episódios de sala de aula.
6. Avaliação da viabilidade de desenvolvimento de metodologias semelhantes conforme as realidades conhecidas pelos participantes da oficina.

Referências e bibliografia

Andrews, P., & Sayers, J. (2012). Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary. *Journal of Mathematical Behavior, 31*, 476-488.

Christiou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*, 1-27.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 115-139.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 1-19.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P.G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing Knowledge of Mathematical Equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology, 103*(1), 85-104.

Steinberg, R.M., Sleeman, D. H., & Ktorza, D. (1990). Algebra students' knowledge of equivalence equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 112-121.

Warren, E. & Cooper, T. J. (2005). Young Chilren's ability to use the balance strategy to solve for unknowns. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(1), 58-72.

Agradecimento

Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais – FAPEMIG – pelo financiamento da pesquisa que gerou este trabalho.

Apêndice A

Construção da balança de pratos e exemplos de possibilidades de exploração

A balança de pratos aqui sugerida tem 4 ganchos de cada lado da haste e é acompanhada de 16 toquinhos (pesos) em 4 massas diferentes.

Material para construção:

1. Peças de madeira todas de 1,5 cm de espessura:

uma base retangular de 12,0 cm x 20,0 cm - **A**

um triângulo isósceles de 20,0 cm de base e 25,0 cm de altura - **B**

um trapézio de base maior 23,5 cm; base menor 6 cm e altura 4 cm - **C**

uma haste de 50,0 cm de comprimento e 2,0 cm de largura. - **D**

2. Um cilindro de madeira, como, por exemplo, um cabo de vassoura, para construção dos toquinhos.

3. Ganchos para fixação de toquinhos (pitões): 26

Depois da montagem das peças a balança fica com este aspecto:

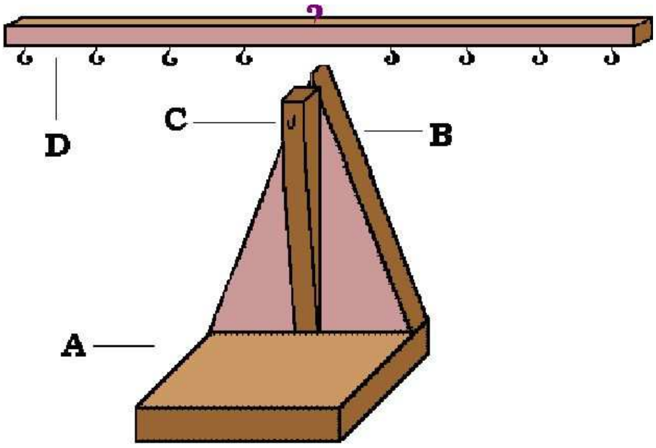

Figura 1. Aspecto da balança depois de construída.

Raramente a madeira apresenta uma densidade homogênea. É de se esperar que, depois de pronta, a haste fique inclinada para um dos lados. O problema pode ser corrigido com um contrapeso, o qual pode ser uma goma elástica ou uma fita adesiva. O contrapeso deve ser usado para equilibrar a haste, quando presa à balança e sem nenhum peso. Esse contrapeso nunca é retirado. Na figura 2, está representado em rosa.

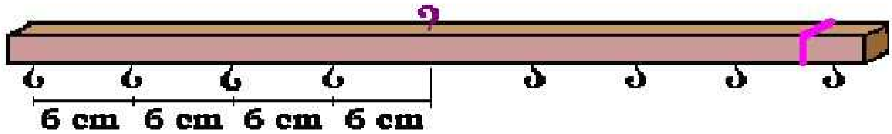

Figura 2. Distância entre os pitões e contrapeso.

A distância de 6cm que separa os ganchos é apenas uma sugestão. Importa que a distância seja rigorosamente a mesma entre cada par de ganchos.

Os toquinhos são 16, em 4 tamanhos e 4 massas:

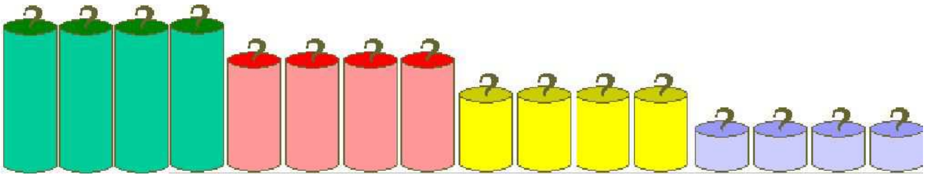

Figura 3. As massas que compõem o conjunto.

As medidas das massas devem ser rigorosas e as relações entre elas são as seguintes:

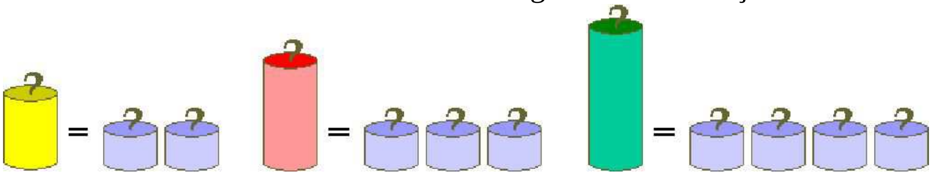

Figura 4. Relações entre as massas.

Para calibrar as massas, pode-se prender dois copos de plástico iguais, um de cada lado da balança, e colocar os toquinhos que se quer calibrar dentro desses copos. Deve-se iniciar pelos toquinhos menores: equilibrar um por um até que suas massas se igualem. Para igualar as massas, pode-se usar pequenos pedaços de prego que serão, posteriormente, fixados ao toquinho que se que aumentar a massa; ou pode-se lixar um toquinho quando se deseja diminuir sua massa.

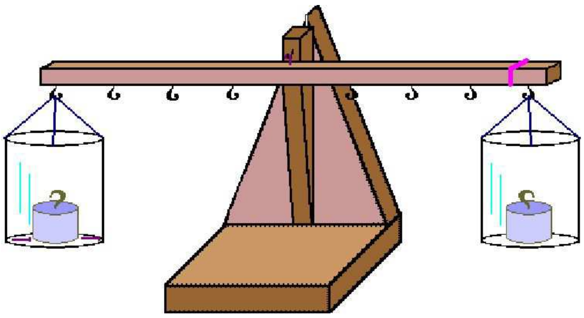

Figura 5. Calibração dos toquinhos.

Utilização

Esta balança pode ser utilizada de diversas maneiras. Existe uma relação matemática que estabelece condições para o equilíbrio, envolvendo pesos e suas posições. Essa relação pode ser colocada no final de um processo, o qual pode se iniciar com desafios do tipo:

1. Equilibre a balança, colocando os toquinhos necessários no lado direito:

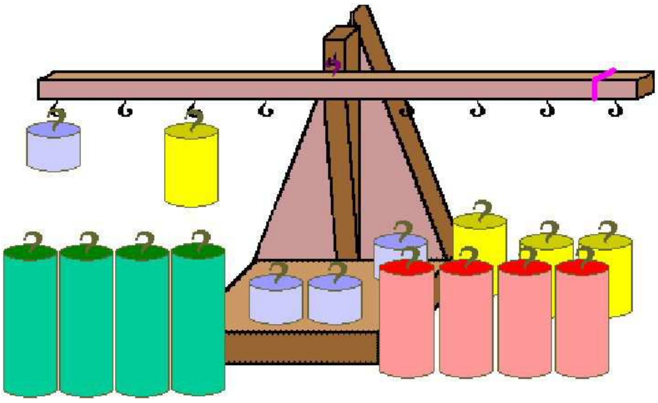

Figura 6. Desafios – exemplo 1.

2. Equilibre o toquinho maior e o toquinho menor, um de cada lado da balança.

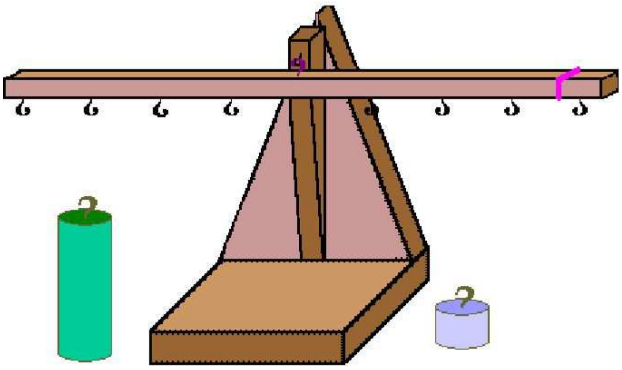

Figura 7. Desafios – exemplo 2.

Relação matemática entre pesos e posições no equilíbrio

Para expressar a relação matemática, podemos pensar os pesos e as posições numerados como na figura 8.

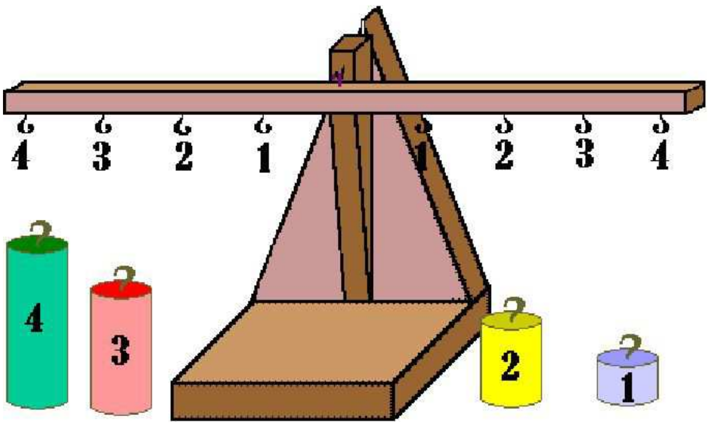

Figura 8. Numeração dos pesos e das posições na haste.

O equilíbrio será atingido se o somatório das multiplicações dos pesos pelas suas respectivas posições em cada lado for o mesmo. Verificando a figura 9, por exemplo, esse somatório se expressa assim:

Do lado esquerdo temos:

Peso 4 na posição 1 $\rightarrow$ $4 \cdot 1 = 4$; Peso 1 na posição 2 $\rightarrow$ $1 \cdot 2 = 2$;

Peso 2 na posição 3 $\rightarrow$ $2 \cdot 3 = 6$ e Peso 3 na posição 4 $\rightarrow$ $3 \cdot 4 = 12$

Somando os resultados das multiplicações: $4 + 2 + 6 + 12 = 24$

Do lado direito temos:

Peso 4 na posição 2 $\rightarrow$ $4 \cdot 2 = 8$ e Peso 4 na posição 4 $\rightarrow$ $4 \cdot 4 = 16$.

Somando os resultados das multiplicações: $8 + 16 = 24$. Portanto, a balança ficará equilibrada nessas condições.

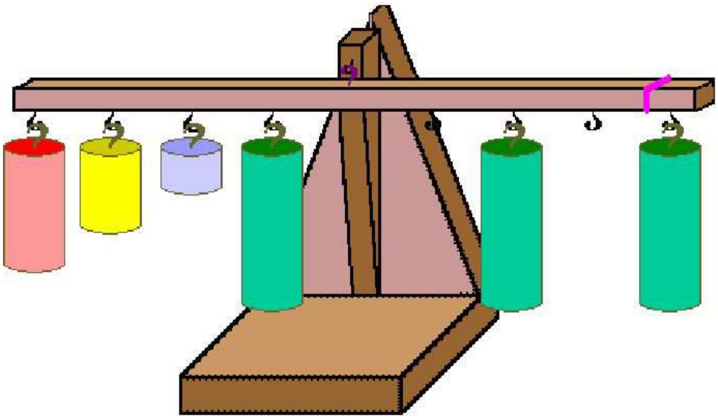

Figura 9. Exemplo de equilíbrio com vários pesos.

Representação gráfica das condições da balança

A situação da balança na configurada como na figura 9 pode ser representada por meio de um diagrama como este da figura 10:

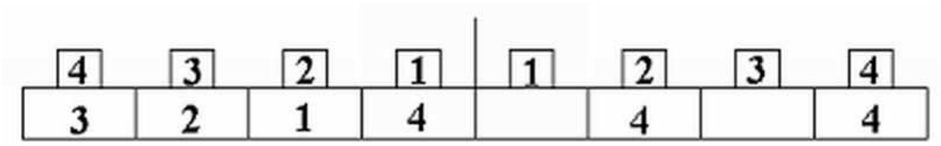

Figura 10. Representação gráfica de pesos e posições.

Uma vez que os usuários compreendam a lógica desse diagrama, podem ser desafiados a resolver um diagrama qualquer antes de conferir suas hipóteses na balança, como no exemplo que segue:

Indique os pesos e as posições que devem ser colocados no lado direito para equilibrar a balança conforme o diagrama da figura 11. Resolva no diagrama e, depois, teste suas hipóteses na balança.

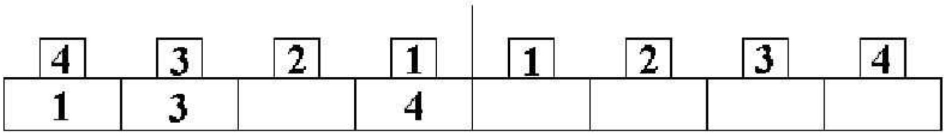

Figura 11. Diagrama propondo um desafio.

Esses desafios podem ser enfrentados mesmo antes dos usuários conhecerem a relação matemática explicitada acima. Além disso, depois de se acostumarem com essa representação, podem enfrentar desafios de uma balança “virtual”, com mais pesos e mais posições. Este seria um exemplo:

Indique os pesos e as posições que devem ser colocados no lado direito para equilibrar a balança representada na figura 12.

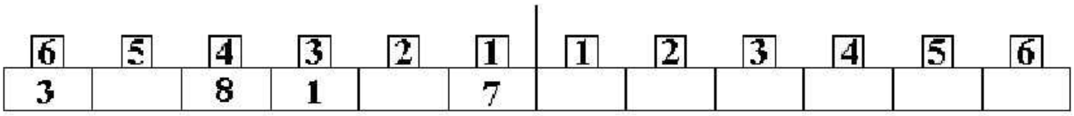

Figura 12. Representação de balança com 6 ganchos de cada lado da haste.