



Las letras en el álgebra como número general en estudiantes colombianos de grado 7° de educación formal

Ronald Andres **Cabrera** Montealegre
Universidad de Tolima
Colombia
ronaldandres-10@hotmail.com

Erika Viviana **Pinzón**
Universidad de Tolima
Colombia
evpinzonm@ut.edu.co

Resumen

El enfoque de este estudio exploratorio en álgebra ha sido la dificultad de entender la letra como número generalizado. Se trabajó con un grupo de 35 estudiantes de grado 7° con el objetivo de identificar sus dificultades al inicio del trabajo algebraico escolar, así mismo se desarrolló una actividad didáctica que ayudara a solucionar dichas dificultades. Siguiendo las ideas de Mason (Mason, 1999) sobre las destrezas que pueden desarrollar los profesores para el apoyo a la expresión de la generalidad, por parte de los estudiantes, y que se sustenta en tres etapas: Ver un patrón, Decir un patrón y Registrar un patrón. Se encontró, entre otros aspectos, que muchos de los niños identifican un patrón, pero presentan dificultades al realizar la generalización y al expresar simbólicamente un problema algebraico.

Palabras clave: patrón, álgebra, generalidad, didáctica, enseñanza e investigación acción.

Planteamiento del problema

El aprendizaje de las matemáticas es fundamental para la formación de los estudiantes tanto en el desarrollo analítico como en la destreza mental para afrontar distintos problemas de su vida diaria. Según el aprendizaje vivido en el colegio en la clase de matemáticas se puede afirmar que el uso que le dan los estudiantes a las letras en álgebra presenta una interpretación incorrecta.

Desde el punto de vista de estudiantes en licenciatura en matemáticas; se evidencia que en la niñez el álgebra que se utiliza son las letras, pero no se entiende el porqué de ellas, se desarrollaba una determinada cantidad de ejercicios prácticos en los que a través de un procedimiento se llegaba a la solución; por ejemplo se comienza a realizar ecuaciones lineales como $2x+4=12$ y aquí después de aplicar métodos de solución de ecuaciones de primer grado donde se encuentra que "X" era igual a 4.

Lo traumático de este tema de algebra era entender que esa letra en algunos ejercicios era igual a un 2, luego daba 3, 5 u otros números pero, la cuestión era ¿luego "X" en un principio no era 4? Es decir cada uno de los ejercicios generaba un nuevo valor para la "X" llevaba a la respuesta de un número, pero no se contempla la idea de que las letras representaban un numero general, es decir que X podía ser cualquier número, ni mucho menos que esto se podían aplicar a la vida diaria, ¿Qué pasaba en la escuela?, ¿Dónde quedaba el pensamiento lógico y la capacidad de generalizar una situación?

A partir de reflexiones realizadas acerca de las investigaciones e ideas de John Mason, quien hace referencia a la expresión de la generalidad y, según experiencias propias, se centra la situación problema a lo vivido por lo niños en el inicio del trabajo algebraico escolar respecto a **la dificultad de entender la letra como número generalizado**; ahora bien, teniendo en cuenta que una de las raíces básicas del Álgebra es la Expresión de la generalidad que bien lo dice John Mason "la vida son las matemáticas y el Álgebra es el lenguaje con el que se expresa esta generalidad" (Mason, 1999).

Es precisamente en este aspecto, en el que los estudiantes presentan dificultades al concebir las letras como símbolos sin sentido, donde a partir de un ejercicio se llega a la respuesta a través de unas "reglas"; que son vistas desde el puesto del aula de clase y escritas en el tablero sin tener otra interacción más profunda.

Antecedentes y fundamentación teórica

A partir de aquí situaremos el problema dentro de un conjunto de aportes en conocimiento de algunos autores que van a sustentar y orientar la conceptualización que se va a utilizar en el ejercicio de exploración.

Pensamiento variacional

En el contexto colombiano se propone en los lineamientos curriculares que "El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas." (MEN, 1998). A su vez plantea que para dar sentido y significado al algebra es pertinente relacionarla en situaciones de cambio y variación de la vida cotidiana.

Se logra observar que en los primeros grados de la básica primaria se diseñan estándares curriculares relacionados tanto con el pensamiento aritmético como con el pensamiento algebraico; por ejemplo: Para los grados primero y segundo se plantean: "Observa y predice el cambio de ciertos atributos medibles de los objetos a través del tiempo" (MEN, 2002, p. 19) y "Reconoce, describe y extiende patrones geométricos y numéricos" (p. 21).

Para los grados tercero, cuarto y quinto, se propone una aproximación al álgebra centrada en los métodos para resolver ecuaciones aritméticas: "Encuentra el número que falta en una ecuación sencilla" (p. 23), "Resuelve ecuaciones sencillas mediante métodos tales como operaciones inversas, cálculo mental o ensayo y error." (p. 25) y "Encuentra soluciones de una cantidad desconocida en una ecuación lineal sencilla" (p. 27).

Teniendo presente las exigencias de los lineamientos y de los estándares curriculares de Colombia respecto a la educación de pensamiento variacional, es necesario apoyarlo desde niveles educativos tempranos para que el niño pueda ir interactuando en las diferentes aplicaciones donde vemos álgebra y sus variables, en aplicaciones con el contexto y demás, pero en la realidad encontramos que el pensamiento variacional como tal se establece desde los grados iniciales de la secundaria lo cual contradice los requerimientos de los lineamientos y estándares curriculares.

Pensamiento algebraico y la expresión de la generalidad

En este pensamiento nos basaremos en las ideas que aporta Mason et al, (1999). A partir de la visión de estos autores el álgebra es un lenguaje por medio del cual se dan a conocer las ideas matemáticas de forma simplificada y que su característica principal es que puede expresar afirmaciones generalizadas las cuales se presentan en todas las áreas de las matemáticas.

Para que el estudiante tenga una comprensión eficaz de ese pensamiento algebraico plantean que es necesario conocer las ideas básicas de lo de que proviene del álgebra y de las cuales representan la base de la comprensión de dicho contenido. En una frase se sustenta: “la generalidad es la vida de las matemáticas y el Álgebra es el lenguaje con el que se expresa esta generalidad” (Mason et al., 1985).

De acuerdo con John Mason, entre las destrezas que se pueden desarrollar para el apoyo a la expresión de la generalidad se sustenta en tres etapas:

- **Ver un patrón:** esta etapa hace referencia a la observación de una serie de figuras o números en secuencia con el fin de percibir o identificar una regularidad.
- **Decir un patrón:** es aquello que puede expresarse en palabras a partir de la observación realizada en la secuencia de figuras o números e identificar si sus reflexiones son correctas o no.
- **Registrar un patrón:** aquí lo que se busca es expresar de forma sucinta lo que se logró decir, de tal manera que las ideas y pensamientos puedan ser plasmados de manera escrita, utilizando palabras o dibujos que mejorará hasta llegar a una expresión simbólica.

A través de estas etapas se llega a la expresión de una generalidad lo que conlleva a usar la letra como representación de cualquier número, finalmente, con este proceso, se logra formar el concepto de la letra en el álgebra como número general.

Algunas concepciones erradas conducen al error del álgebra elemental

La investigación ha demostrado que la dificultad que los niños presentan en el aprendizaje del álgebra, es su confusión con las letras, dando valores incorrectos a estas (Booth. Lesley, 1999).

Los niños no entienden que las letras pueden representar números, ellos piensan en que las letras son unidades de medida, objetos, apellidos, o hasta comida. Como lo presenta Lesley Booth en la entrevista a un niño de 14 años llamado Benedicto:

e: que significa " y " (en la adición de 3 a 3y).

B: puede significar cualquier cosa.

e: ¿Cómo qué?

B: como piñas, uvas,..... (Entrevista a Benedicto, 14 años. Booth, lesley).

Se evidencia el desconocimiento del verdadero significado de las letras en el ejercicio propuesto, el niño atribuye la " y " a una fruta la cual debe sumar con otra sin tener en cuenta nada más en el ejercicio.

El inicio de la educación matemática involucra a los niños en un proceso repetitivo donde una letra representa el número de lados de un cuadrado " L" o una letra es la inicial de un nombre "E" al dar operaciones en las cuales se involucren estas ellos siguen atados a estas formaciones iniciales por ejemplo si se realiza la adición de $3 + 3e$, los estudiantes comprenden como 3 sumado con 3 elefantes, atribuyendo la "e" a la inicial del nombre del elefante.

Al realizar operaciones aritméticas que sean de tipo algebraico, algunos de los jóvenes muestran solución a diferentes ejercicios propuestos en clase; será que en verdad entienden esas operaciones, por lo general el procedimiento que ellos efectúan es el de sumar o el de restar los números y luego unir a esa operación las diferentes letras que estuvieran involucradas, pero este procedimiento se hace sin una verdadera razón lógica.

Diseño y metodología

El desarrollo de nuestro ejercicio de exploración está basado en el enfoque de investigación - acción, propuesto por Hopkins (2008); S. Kemmis y R. McTaggart (1988). Definen la investigación- acción como un enfoque de trabajo en el aula de clase para que el docente pueda generar un proceso continuo de autoevaluación y mejoramiento de la práctica-enseñanza, siendo los estudiantes la población en la investigación y el docente el administrador del proceso.

El método de investigación- acción es un modelo visto por diferentes autores pero en nuestro ejercicio de exploración va enfocado en el método de investigación acción propuesto por Ponte, P (1995). Es el siguiente:

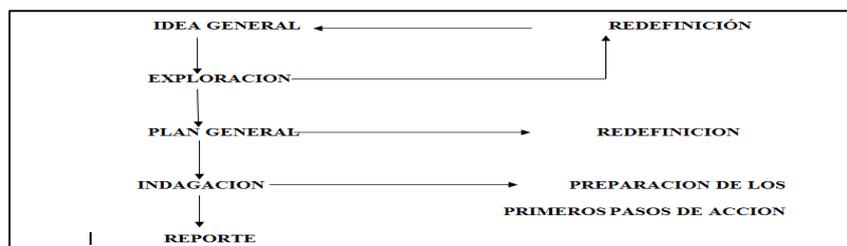


Figura 1. Método investigación-acción.

El siguiente diagrama ilustra el proceso de trabajo que seguimos en este proyecto.

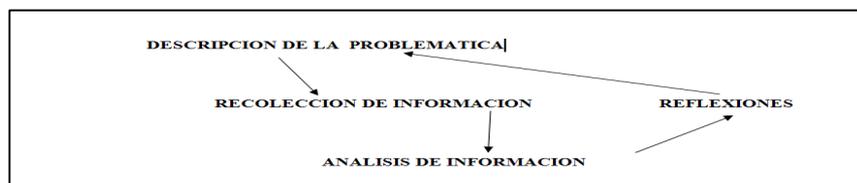


Figura 2. Proceso del trabajo.

El primer paso de la investigación fue identificar posibles problemáticas que se presentan en los estudiantes en el inicio del trabajo algebraico escolar, de las cuales se escogió: la

dificultad de los niños al emplear las letras en el álgebra como un número general. Se diseñó un instrumento de recolección de información basado en preguntas estratégicas donde se involucra el concepto de la letra como número general, con el fin de explorar el pensamiento de los estudiantes respecto a esta problemática, para este proceso se escogió el grado séptimo de un colegio público de la ciudad, seleccionando una muestra de 35 estudiantes.

Se hace un respectivo análisis de las diferentes respuestas y procedimientos de los estudiantes las cuales fueron la base para la redefinición de la problemática.

Con base en lo anterior se diseñó y aplicó un plan de acción encaminado a corregir las diferentes dificultades evidenciadas en los estudiantes a través actividades didácticas que beneficien la comprensión de la letra en el álgebra como número general.

Finalmente se analizaron los resultados del plan de acción para reflexionar sobre el impacto de este en el pensamiento de los estudiantes respecto a la problemática de interés.

Resultados

Se realizó una primera actividad de exploración del pensamiento (pre-test) de los estudiantes con el objetivo de identificar las posibles falencias en la interpretación de la letra como número generalizado. La actividad consta de 2 preguntas cada una con 5 incisos, algunos de los resultados y análisis de las respuestas se muestran a continuación:

Observamos el diagrama

Figura No. 1



Figura No. 2

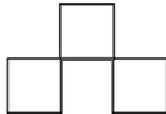
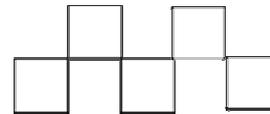


Figura No. 3



- Dibuje la Figura No. 4.
- ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 7?
- ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 13?
- ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 100?
- Como hizo para saber el número de cuadrados que hay en la Figura No. 100.

1. observe la siguiente tabla:

X	Y
1	1
2	3
3	
4	10
5	15

- Cuando X tiene un valor de 3 ¿cuál es el valor de Y?
- Cuando X tiene un valor de 15 ¿cuál es el valor de Y?
- Cuando Y tiene un valor de 3 ¿cuál es el valor de X?
- Cuando Y tiene un valor de 20 ¿cuál es el valor de X?
- Como hallo el valor de X y de Y en cada ejercicio anterior (explique con sus propias palabras)

Pregunta 1

El 88.6% de los alumnos realizan la figura siguiente a la que se muestra en el enunciado, quedando un 11.4% de los cuales no identifican la secuencia.

¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 13?

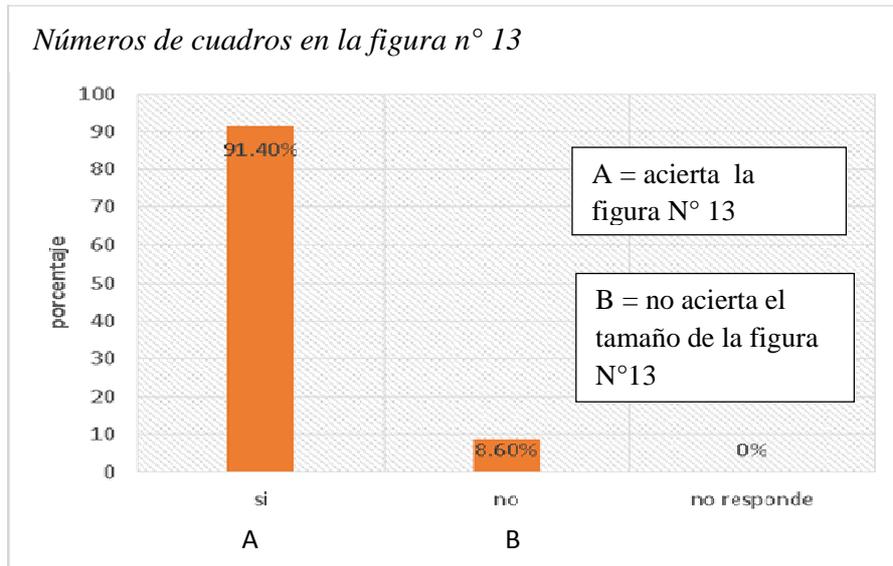


Figura 3. Resultados pregunta 1, inciso 3.

Se aumenta el número de la figura la cual deben hallar, el 91.4% de los alumnos reconocen el número de cuadros hasta la figura N° 13 y un 8.6% de jóvenes que no reconocen los cuadros correspondientes a la figura N° 13.

¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 100?

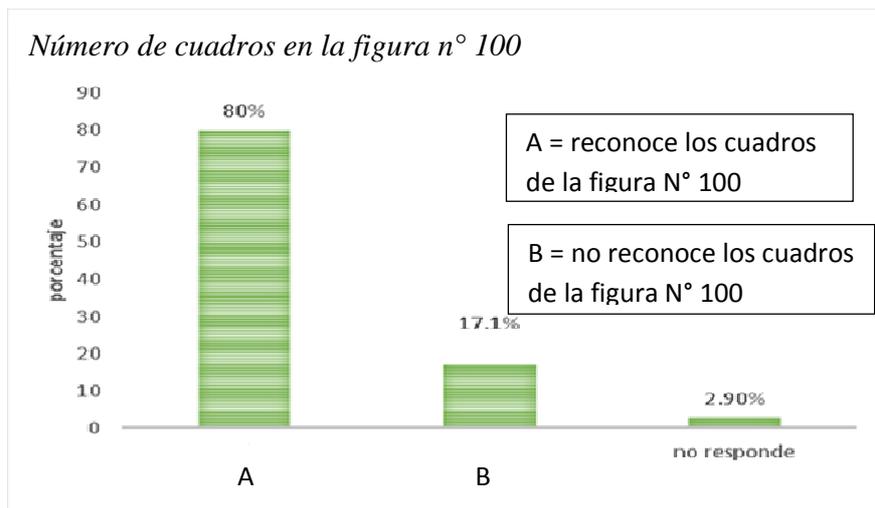


Figura 4. Resultados pregunta 1, inciso 4.

Aunque no es tan grande el cambio vemos que ya hay algunas novedades en los porcentajes, donde el 80% reconoce los cuadros correspondientes a la figura N° 100 y un 17.1%

no lo reconoce. En esta figura vemos el porcentaje de los que no responden o dejan en blanco que fue de un 2.9%.

Como hizo para saber el número de cuadrados que hay en la Figura No. 100.

Multiplique por 2 y le reste 1	6
Aumento de cuadros por figura	10
Cantidad de cuadros de la parte de abajo es la misma de número de la figura y la de arriba es uno menos	9
Otras	9
TOTAL	34

Figura 5. Resultados pregunta 1, inciso 5

Nos damos cuenta que algunos de los estudiantes en el momento de ver las figuras de la secuencia y de seguir la prolongación con unas pocas graficas o datos que continuaban, encontraron sus respuestas adecuadamente, pero en verdad encontraron la generalización.

Cuando X tiene un valor de 15 ¿cuál es el valor de Y?

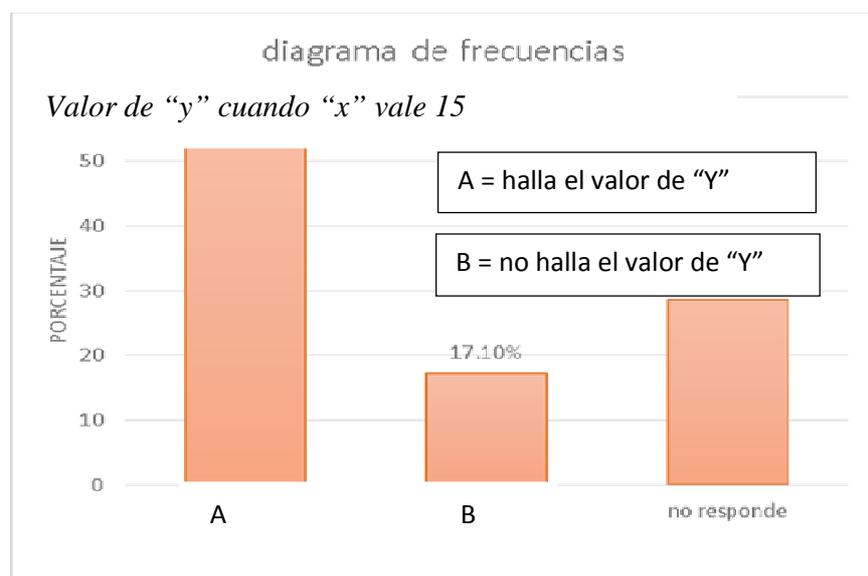


Figura 6. Resultados pregunta 2, inciso 2.

En esta pregunta ya se pide un valor que no se ve en la tabla de valores, por ende se presentan más dificultades en el momento de identificar la secuencia. El 54.3% de los alumnos hallan el valor de Y el 45.7% no halla el valor de Y, un 28.6% no responde dejando en blanco el espacio de respuesta.

Cuando Y tiene un valor de 20 ¿cuál es el valor de X?

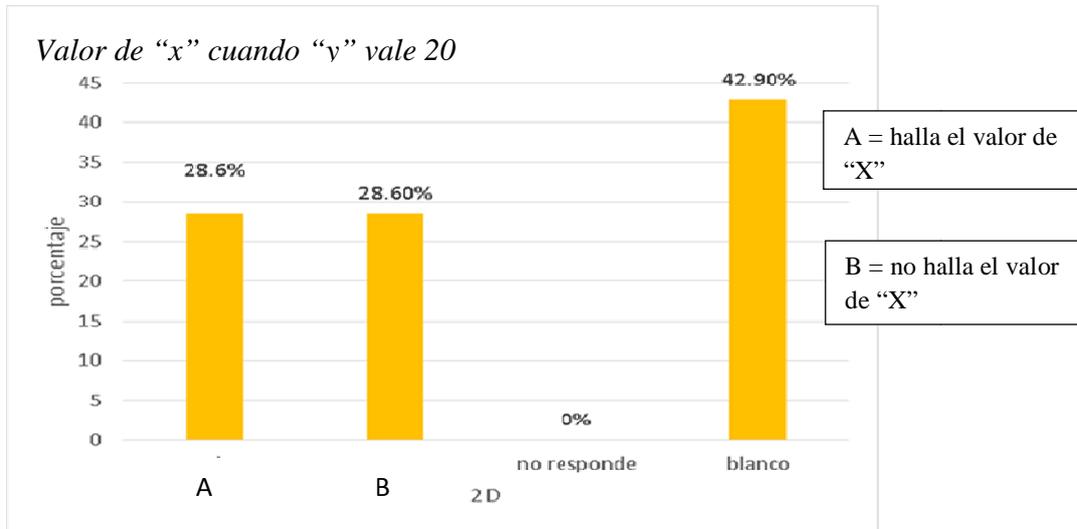


Figura 7. Resultados pregunta 2, inciso 4.

El 28.6% de los alumnos hallan el valor de la X y un porcentaje igual de 28.6% no halla el valor de X, además vemos que 42.9% deja en blanco la respuesta.

Tabla 1

Repuestas de los estudiantes

1	Sumando el valor de X con Y	7
2	Siguiendo una secuencia	9
3	Haciendo un plano cartesiano o tabulando todos los valores	4
4	otras	14
	TOTAL	34

Cómo halló el valor de X y de Y en cada ejercicio anterior

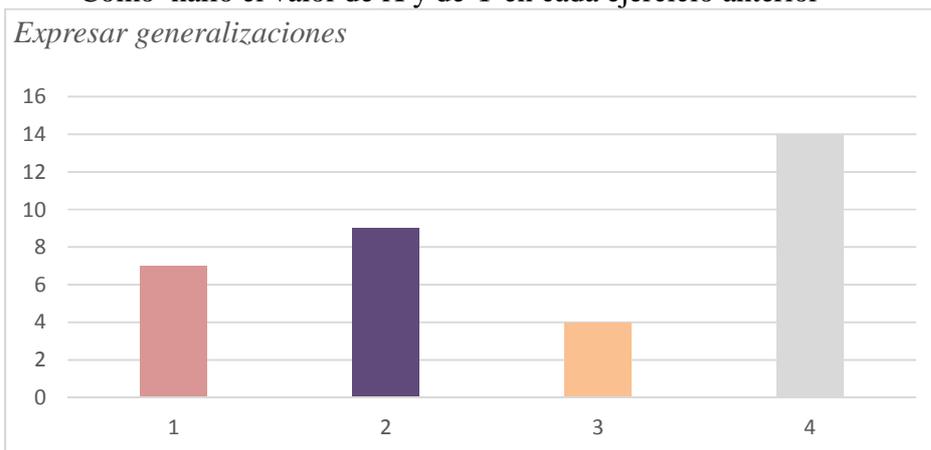


Figura 8. Resultados pregunta 2, inciso 5.

Los resultados obtenidos en esta pregunta son variados en los cuales vemos respuestas como "Pues suponiendo que al seguir la secuencia $6+5-1=20$ esta sería mi forma para sustentar

el resultado”, se parte del hecho que puede existir una secuencia por el ejercicio anterior pero no está claro cuál es, y por ello describen algo que no tiene coherencia con el ejercicio.

Como estrategia al mejoramiento de las dificultades que se encontraron en el trabajo de exploración se diseñó una unidad didáctica que consta de diferentes actividades como las tablas de Hanói con el fin de que los estudiantes pudieran Representar, analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, otra llamada elaboración de manillas con el objetivo de Generar un espacio de desarrollo del pensamiento variacional por medio de un contexto conocido donde los estudiantes se involucran en temas como la regularidad la identificación de un patrón y la expresión simbólica del mismo y, la actividad conocida como el juego de las palmas con el objetivo de encontrar los términos que conforman una secuencia numérica, donde se ven variables como números generalizados.

De esta manera podemos afirmar que aproximadamente un 95% de los estudiantes tienen facilidades para encontrar una regularidad. Un 90% ven las matemáticas en la situación planteada. El 61% de los estudiantes no utilizan un modelo matemático para justificar su respuesta. El 29% utiliza un modelo matemático pero no es el apropiado a los problemas planteados, el 5% responde con un modelo matemático apropiado al problema y solo el 5% no respondió.

Por último se aplicó un pos-test para identificar cuáles fueron los resultados de la unidad didáctica y comparar el pensamiento de los estudiantes antes y después de la aplicación, los resultados fueron los siguientes:

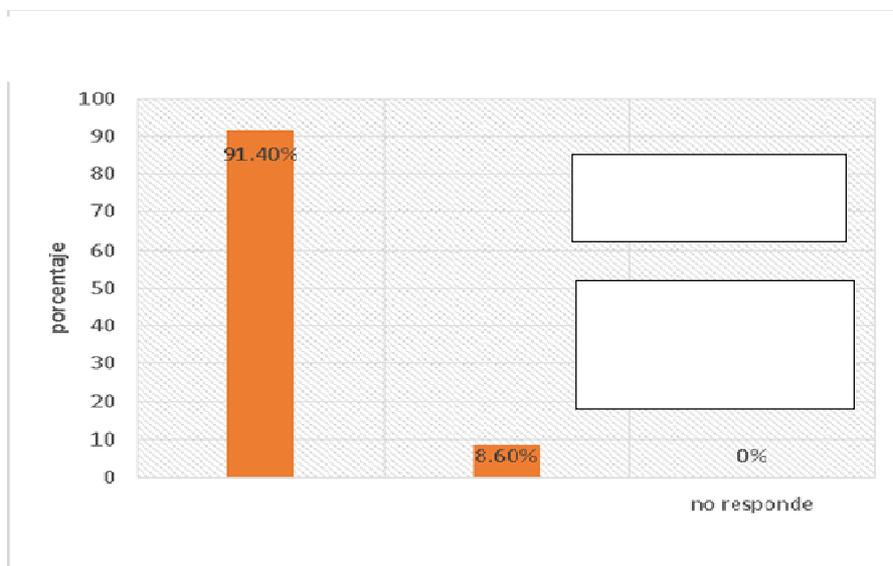


Figura 9. Comparación de resultados pre test y pos test.

Como las preguntas anteriores vemos un caso particular para seguir formando ese concepto de expresión generalizada, existe un gran porcentaje 94% de estudiantes que escriben la expresión matemáticamente esperada, aun vemos un 6% de los cuales no responden matemáticamente lo esperado.

Tabla 2

¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 100?

FRECUENCIA DEL TIPO DE RESPUESTA		
CATEGORIA	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Correcta	32	91%
no correcta	1	6%
no responde	2	3%
	35	

Notas. Comparación de resultados pre test y pos test.

Para una valor mayor, el 91% de los estudiantes responden lo matemáticamente esperado, pero en esta pregunta ya vemos un 3% de los que no responden lo matemáticamente no esperado y el 6% no responde.

Discusión de resultados

Según los planteamientos del MEN el pensamiento algebraico se debe iniciar desde la educación básica primaria, pero basándonos en los resultados podemos observar que solo hasta el grado 7° se están iniciando en el trabajo algebraico como un corte drástico de la aritmética al álgebra, así que sería conveniente para los estudiantes aprender desde los primeros grados de escolaridad este tipo de temas a través de métodos lúdicos los cuales ayudaran a fortalecer las destrezas para el apoyo a la expresión de la generalidad.

Ahora bien a pesar de las dificultades que se presentan en el instrumento de exploración los resultados son satisfactorios y los estudiantes realizan la primera etapa (observar, decir) que propone Mason Mason (Mason et al., 1985) para lograr un expresión general. La dificultad que presentan es llegar al registro escrito (simbólico) de la generalidad encontrada, tanto así que en la mayoría de los casos los estudiantes preferían no escribir nada cuando se les pedía la expresión general de un problema.

Muchos de los estudiantes encuentran un sentido matemático al trabajo realizado pero en el momento de expresarlo en un dibujo no lograr hacerlo adecuadamente, vemos que el enfoque de conocimiento explícito II no se completa según Karmiloff Smitt, el estudiante no llega a un nivel completo de conocimiento solo queda en la fase básica, por ello las dificultades en el momento de hacer contextualizaciones y situaciones problema

Conclusiones

- Identificamos dificultades en los estudiantes no solo en expresar su pensamiento matemático, si no en sus concepciones de matemáticas.
- En el momento que los estudiantes realizan la expresión generalizada, logramos en pequeña parte pero significativa que lograran ver la letra como un número generalizado
- Se logran evidenciar diferentes formas de pensamiento matemático, las cuales usan para llegar a una respuesta.
- Se ejecutó un plan de acción en el que se promovió la corrección de algunas las falencias que presentaban los estudiantes en el álgebra.

Limitaciones del estudio

La falta de tiempo fue un factor determinante a la hora de realizar nuestro ejercicio de exploración, debido a que no alcanzamos un mayor grado de indagación en el pensamiento de los niños que participaron en nuestro proyecto.

Prospectivas

Es adecuado tener una correcta profundización de todas estas ramas del álgebra que no se concebían en nuestro conocimiento hasta este punto donde con la ayuda de nuestra docente - asesora tenemos un poco más accesible nuestro pensamiento algebraico, pero vale aclarar que este proceso no termina aquí hay que seguir con pasos de investigador; indagando y llenando nuestro saber matemático con más descubrimientos inertes(ya que no son conocidos hasta el momento de nuestro estudio pregrado) para nosotros pero latentes en el mundo algebraico-matemático.

Bibliografía

- Agudelo Valderrama, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico*. Tunja: universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Booth, L. (1999). Recurso 0. En *Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra* (pp. 129-135). Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Disponible en: www.mineducacion.gov.co/7-305.
- Elliot, J. (1991). *La investigación- acción y el cambio educativo*. Madrid: Ediciones Morata.
- Hopkins, D. (2008). *Hacia una buena escuela. Experiencias y lecciones*. Chile: Área de educación fundación Chile.
- Mason, J., Graham, A.; Pimm, D., & Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra y rutas hacia el álgebra*. Tunja. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Traducción de Cecilia Agudelo Valderrama).
- Ministerio de Educacion Nacional. (2003). *Estándares básicos de matemáticas*. Bogotá.
- Ministerio de Educacion Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá. Disponible en: www.mineducacion.gov.co/7-305.
- Ponte, P. (1995). Action research as a further education strategy for school, counselling and guidance. *Educational action Research*. 3(3), 287-305.