Escenarios de aprendizaje para la solución de problemas apoyados con matemática dinámica.

Alfonso **Meléndez** Acuña
Escuela Colombiana de Ingeniería,
Bogotá Colombia
alfonso.melendez@escuelaing.edu.co

Resumen

Problem solving has been investigated in mathematics education for more than 60 years ago since the pioneering work of George Polya (Polya , 1965). His four step method: understand the problem , devise a plan , carry it out and look back , still apply as a general framework. In recent years the emergence of dynamic mathematics has scaffolded this and other methods of solving mathematical problems (Christou , Mousoulides , Pittalis & Pitta - Pantazi , 2005) , this has generated great interest in new ways of teaching and learning mathematics and in building dynamic learning scenarios to support the different stages of problem solving. A teaching- learning approach for problem based learning, based on the construction of dynamic learning scenarios and the notion of co-action is discussed and presented in this article.

Palabras clave: Dynamic mathematics, GeoGebra, problem solving, Polya, education, mathematics

Objeto de estudio

La solución de problemas es un tema importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los educadores y matemáticos George Polya (1887-1985) y Alan H. Schoenfeld (1943-), con sus continuos e importantes aportes en esta área han destacado dos aspectos en los cuales haremos énfasis en el Taller. El elemento integrador de diferentes áreas matemáticas y el aspecto formativo, en lo que tiene que ver con el desarrollo de habilidades creativas y estrategias heurísticas.

El surgimiento de la matemática dinámica [1] ha contribuido a la creación de ambientes educativos computacionales de apoyo a la solución de problemas en sus diferentes etapas (comprensión, exploración /descubrimiento, justificación/validación) y ha permitido potenciar las capacidades creativas y heurísticas del estudiante y la percepción de una matemática integrada en sus diferentes disciplinas (geometría, álgebra, etc.).
En el Taller se discutirán escenarios de aprendizaje en GeoGebra para apoyar las diferentes etapas del proceso de solución de problemas. Estos escenarios servirán de base para generar reflexión y discusión por parte de los asistentes sobre el rol de la matemática dinámica en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Antecedentes

"La principal razón de existir del matemático es resolver problemas y, por lo tanto, en lo que realmente consisten las matemáticas es en problemas y soluciones". Paul R. Halmos

Desde el año 2012 se viene trabajando a nivel teórico y práctico en la integración entre la matemática dinámica y la solución de problemas con el fin de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Inicialmente se comenzó en cursos de cálculo para estudiantes de primeros semestres de ingeniería. La primera propuesta metodológica se presentó en el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, CIBEM 2013[2], realizado en Montevideo, Uruguay, en septiembre de 2013. A partir de este momento se vio la necesidad de trabajar no sólo con estudiantes sino también con profesores de matemáticas, para lo cual se diseñó un curso que fue dictado a maestros de colegios como parte de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia. El resultado de esta nueva experiencia se documentó y se escribió un artículo para el congreso Frontiers in Mathematics and Science Education, FISER 2014[3], realizado en Famagusta, Turquía, en febrero de 2014. Este mismo artículo se publicó luego en el European Journal of Science and Mathematics Education . Finalmente, con algunas mejoras en la metodología se presentará en el Congreso internacional de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediadas por TIC, CIMATIC 2014, que se llevará a cabo del 6 al 8 de octubre en Armenia, Colombia.

Fundamentación teórica

"First, guess; then prove... Finished mathematics consists of proofs, but mathematics in the making consists of guesses" (Pólya, 1965)

El uso de herramientas (tanto tradicionales como digitales) es un componente esencial en el aprendizaje de las matemáticas. A medida que se emplean facilitan las actividades del aprendiz, van configurando su espacio mental y, con el tiempo, se constituyen en herramientas psicológicas mediadoras de los procesos de pensamiento (Vygotsky, 1978). Luis Moreno-Armella, Stephen , J. Hegedus y James J. Kaput distinguen cinco etapas en la evolución de las herramientas simbólicas,

[1]*Colette Laborde (Cabri), Markus HohenWarter (GeoGebra).*
[2]http://www.cibem.org/home.php.
[3]http://http://fiser.emu.edu.tr.

que van "desde inscripciones estáticas e inertes a objetos dinámicos o diagramas que son construíbles, *m*anipulables e interactivos" (Moreno-Armella & Kaput, 2008). Estas últimas herramientas simbólicas, que hoy en día reciben el nombre de matemática dinámica, han venido revolucionando la educación matemática en los últimos años, entre otros aspectos porque proveen "facilidad y rapidez para transformar las construcciones hechas en la pantalla, realizar mediciones y disponer de un gran número de ejemplos tan variados como quieran. Esto da a los estudiantes la posibilidad de realizar experimentaciones que les permitan plantear y verificar conjeturas o encontrar propiedades matemáticas no evidentes con las que abordar la resolución del problema planteado" (Gutiérrez & Boero, 2006).

Algunos autores han planteado una nueva manera de interacción con los objetos matemáticos, llamado co-acción: "Consideremos lo que llamamos objetos de **frontera** que son esenciales para que ocurra la co-acción. Estos son encarnaciones digitales y dinámicas de objetos matemáticos que son definidos inicialmente en un ambiente de lápiz y papel y que pueden ser explorados de manera significativa en estos nuevos ambientes. Esta encarnación no es sólo un cambio semiótico de representación dentro del mismo medio, el medio estático. De hecho, una representación digital semiótica de un objeto de **frontera** posee una cualidad que no está presente en la representación de lápiz y papel: la ejecutabilidad de su representación (Moreno-Armella et al., 2008). Esta cualidad puede transformar **la clase de interacción que un estudiante tiene con las matemáticas**, por ejemplo, cuando dentro de un entorno como GeoGebra o Cabri un estudiante se encuentra explorando las propiedades de un triángulo y mueve uno de sus vértices con el ratón o usando un deslizador, el entorno reacciona creando un nuevo triángulo que conserva ciertas propiedades del original, esto estimula mentalmente al estudiante permitiéndole observar alguna regularidad. Esta interacción entorno-usuario al ser iterada produce la llamada co- acción.

Metodología

En el caso de la metodología de solución de problemas propuesta por Polya, la interacción del estudiante con un entorno dinámico permite que la co-acción se produzca en cada etapa del proceso de solución , el reto consiste en construir los entornos dinámicos adecuados para que se llegue a una solución. Veamos un ejemplo:

> *Hay dos postes clavados en la tierra, uno mide 6 metros de alto y el otro 3. Los postes se encuentran separados por una distancia d. La parte superior de cada poste está atada con un lazo a la base del otro poste. ¿Cuál es la altura mínima del punto Q? (Diagrama 1)*

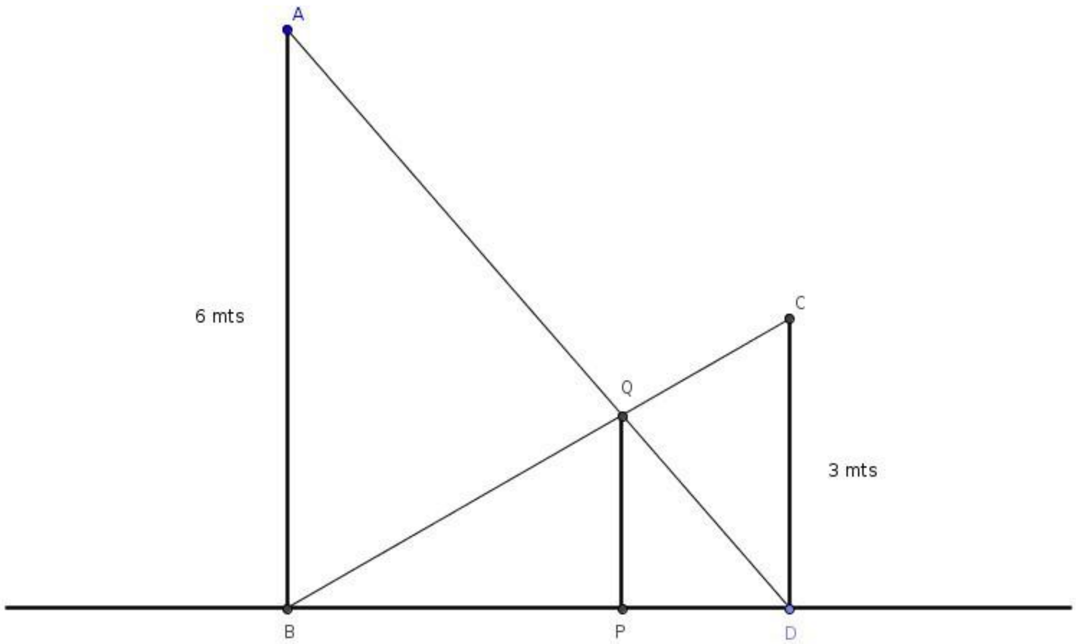

Diagrama 1. El modelo de los postes.

1. *Comprensión del problema*

Una simulación física revela algunos detalles del problema, pero tiene limitaciones: los estudiantes no pueden manipular fácilmente el problema o extender y modificar sus parámetros. Al solicitarles la construcción de un modelo en matemática dinámica (en este caso GeoGebra), la mayoría de estudiantes, en una etapa inicial, utiliza líneas y segmentos sin atender a las relaciones geométricas del problema. Al realizar la prueba del arrastre el modelo colapsa. Este es un "buen" error, ya que lo motiva a entender las limitaciones de un modelo visual y lo lleva a observar la relación entre los datos y la incógnita (las condiciones del problema), o sea los aspectos geométricos del problema.

Luego de obtener un modelo "matemático" en GeoGebra, donde están plasmadas las relaciones entre los datos del problema, se puede entablar una breve conversación inicial con el modelo (co-acción) para lograr un entendimiento del problema y luego con los compañeros de clase y, posiblemente, con el profesor para validar "socialmente" el modelo. Esto conduce rápidamente a la observación de que, por ejemplo, los postes deben ser perpendiculares al piso y que éste no necesariamente debe estar horizontal en un modelo matemático dinámico.

2. *Diseño de un plan*

Una vez se logra "expresar" en GeoGebra la estructura geométrica del problema y se tiene una discusión sobre su validez, se puede resolver la pregunta planteada: ¿A qué altura está el punto Q? Empleando el modelo se puede observar que el punto Q está a una altura de 2 metros del piso (**Diagrama 2**). Una exploración posterior permite determinar que la distancia entre los postes es irrelevante, incluso la altura se mantiene si el piso no es horizontal. Arrastrando el punto Q el modelo le informa al estudiante que su altura es invariante, en este caso la altura del punto siempre es 2. Esto explica de inmediato por qué esta altura siempre es igual. Los estudiantes son “inducidos” por el modelo dinámico al siguiente nivel de exploración: ¿Cómo está relacionada la altura del punto Q con la de los dos postes? Muchos estudiantes se aventuran rápidamente a formular una hipótesis:

La altura de P es el cociente entre las longitudes del poste más largo y el más corto.

Numéricamente esta hipótesis es cierta para el enunciado del problema, pero inmediatamente se puede pasar a la co-acción e investigar y determinar (cambiando la longitud de los postes) que esta propiedad no se cumple y surge el siguiente plan: encontrar una relación general entre la altura de los postes y la altura del punto Q.

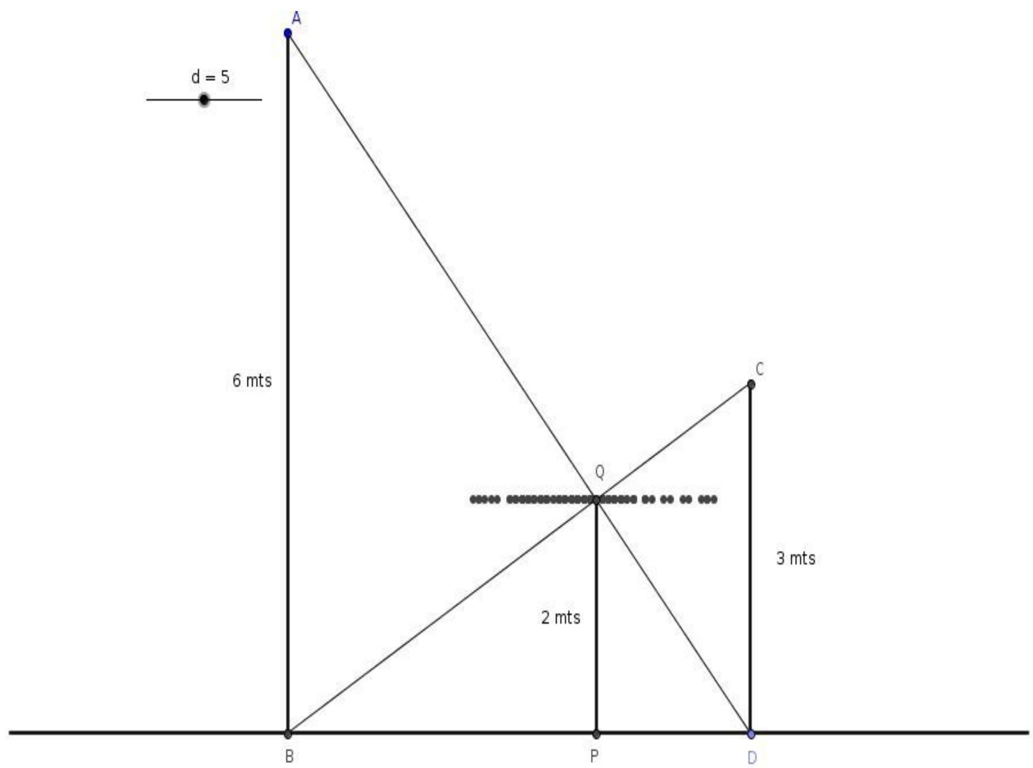

Diagrama 2. Diseño de un plan.

3. *Ejecución del plan*

Se debe encontrar una relación general entre la altura de los postes y la altura del punto Q. En experiencias de aula con estudiantes y profesores la ejecución normal del plan involucra proporcionalidades de triángulos; sin embargo, teniendo en cuenta que tenemos un ambiente dinámico que fomenta la integración entre diferentes ramas de la matemática, puede surgir el siguiente plan de ejecución para resolver el problema:

Mirar qué pasa cuando la distancia entre los postes tiende a cero.

Si construimos un escenario donde se pueda ejecutar este plan podríamos tener algo como lo siguiente (**Diagrama 3)**:

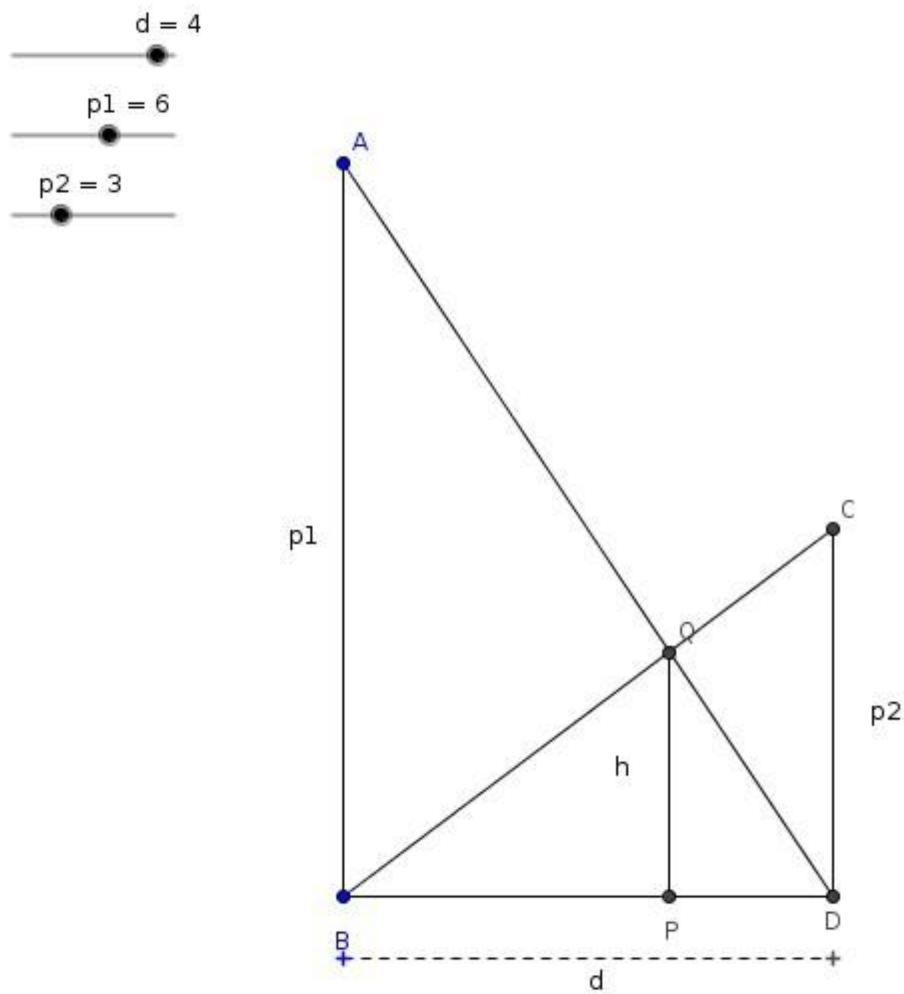

Diagrama 3. Escenario simplificado.

Cuando d tiende a cero hay tres segmentos que quedan iguales: BQ, PQ y DQ, esto nos induce a tratar de encontrar relaciones de proporcionalidad entre estos segmentos. Surge entonces la siguiente fórmula:

BQ/CQ = AQ/DQ [1]

Y al deslizar d hacia 0, obtenemos **(Diagrama 4):**

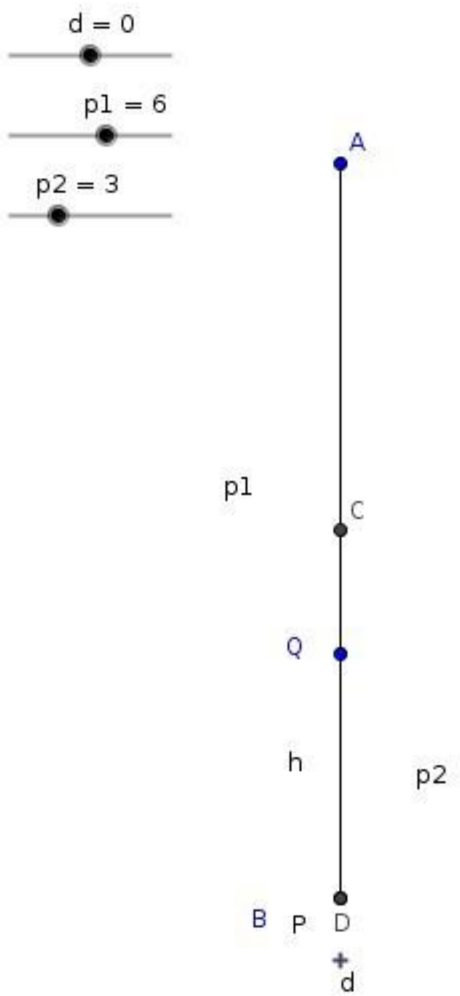

Diagrama 4. Reducción de distancia a cero.

en este caso límite, BQ=PQ=DQ=h, QC=p2-h, AQ=p1-h y obtenemos de [1]:

h/(p2-h)=(p1-h)/h [2]

resolviendo para h, encontramos fácilmente que h= pi*p2/(p1+p2), o sea que h es la media armónica de p1 y p2.

Conclusiones

Aunque descubrir la solución a un problema es interesante, lo más importante es la experiencia holística que ayuda a los estudiantes a apreciar las formas matemáticas de razonamiento y la "racionalidad" detrás de las leyes matemáticas. A lo largo del aprendizaje, la co-acción permite desarrollar una gran variedad de roles cognitivos, como los siguientes:

1. Ayuda a los estudiantes a entender el problema y a identificar falencias en su conocimiento matemático.
2. Ayuda a resolver el problema original y abre la puerta a futuras

exploraciones.

3. Ayuda al estudiante a razonar paralelamente con el modelo, formulando y rechazando hipótesis.
4. Sirve como un modelo conceptual para el razonamiento, que eventualmente se puede incorporar en un modelo mental del estudiante, útil en un posible encuentro con modelos similares.
5. Por último, muestra cómo las herramientas soportan y limitan nuestra percepción de los procesos matemáticos.

Bibliografía

Gutiérrez, A., & Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J., & Kaput, J. J. (2008). From Static to Dynamic Mathematics: Historical and Representational Perspectives. Educstudmath *Educational Studies in Mathematics*, *68*(2), 99-111.

Moreno-Armella, L. & Hegedus, S. J. (2009). *Co-action with digital technologies*. *ZDM*, *41*(4), 505-519.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Vygotsky, L.S. & Cole, M. (1980). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes* (New Edition.). Cambridge: Harvard University Press.