As escolas do Formalismo, Logicismo e Intuicionismo: Um olhar para o Ensino de Matemática

Daniel Zampieri **Loureiro**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Cascavel
Brasil
zampiieri@hotmail.com
Tiago Emanuel **Klüber**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Cascavel
Brasil
tiagokluber@gmail.com

Resumo

Nesse trabalho, a partir de nossa interrogação de pesquisa "*Quais as implicações das escolas do Formalismo, Intuicionismo e Logicismo no ensino de Matemática?*", buscamos compreender algumas das principais características que sustentavam as estruturas teóricas de cada uma das três escolas e relacioná-las com o ensino da Matemática. Efetuamos apontamentos no que tange o ensino de Matemática, visando destacando as categorias epistêmicas: sujeito do conhecimento e objeto matemático. A pesquisa é bibliográfica, ensaística e qualitativa. Em suma, é possível afirmar que o desenvolvimento de ideias, teorias e concepções em torno do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo contribuíram de forma ímpar para o desenvolvimento da Matemática e contemporaneamente, podemos identificar uma relação de coexistência entre essas três escolas, no que se refere ao ensino Matemática.

Palavras-chave: Ensino da Matemática, Educação Matemática, Escolas Filosóficas, Epistemologia, Desenvolvimento da Matemática.

Introdução

Este trabalho está inserido no contexto do desenvolvimento da dissertação de mestrado, que trata da abordagem dos conteúdos matemáticos em atividades de Modelagem Matemática. Ela está vinculada ao Programa de Pós-Graduação *stricto sensu* em Educação, nível de Mestrado, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. Assim, no sentido de melhor compreender diferentes aspectos que influenciam o ensino, há a necessidade de um olhar para subtemas no que tange a epistemologia e a compreensão da "natureza" do conhecimento matemático.

Destacamos a importância desse olhar epistemológico, visto que é necessário compreender como se constituiu o processo de formalização da Matemática como ciência e possíveis implicações para a área de ensino. Portanto, discutir o tema em questão, requer elucidar o nosso entendimento sobre ele. Assim, compartilhamos daquilo que Bruyne (1982, p. 41) esclarece sobre a importância de distinguir duas funções da própria epistemologia1) metacientífica e 2) intracientífica. A primeira faz referência ao olhar retrospectivo sobre o desenvolvimento mais geral das ciências, estabelecendo "[...] reflexão sobre os princípios, os fundamentos, a validade [...]" e a segunda "[...] representa um polo intrínseco à pesquisa científica".

Convergindo à citação supracitada, buscaremos compreender quais foram os fatores de influência que contribuíram para a Matemática se constituir como Ciência. Para tanto, focaremos, mesmo que rapidamente, nos aspectos intracientíficos e históricos, no intuito de compreender as tentativas de fundamentar a Matemática.

Justificada direção a que nos lançamos, indagamos: "*Quais as implicações das escolas do Formalismo, Intuicionismo e Logicismo no ensino de Matemática?*" passamos a explicitar a metodologia empregada.

A metodologia empregada

A partir de nossa pergunta diretriz "*Quais as implicações das escolas do Formalismo, Intuicionismo e Logicismo no ensino de Matemática?*" e considerando que "[...] A interrogação se comporta como se fosse um pano de fundo onde as perguntas do pesquisador encontram seu solo, fazendo sentido" (Bicudo, 2011, p. 23), buscamos estabelecer seguridade pelo caminho a ser percorrido. Frente ao exposto, versaremos sobre o modo como procedemos nesta investigação.

Destacamos a postura qualitativa de pesquisa assumida por nós, visto que,

> [...] nas abordagens qualitativas, o termo pesquisa ganha novo significado, passando a ser concebido como uma trajetória circular em torno do que se deseja compreender, não se preocupando única e/ou aprioristicamente com princípios, leis e generalizações, mas o olhar à qualidade, aos elementos que sejam significativos para o observador – investigador (Garnica, 1997, p. 111).

Munindo-nos dos "elementos" que se revelam de nossa indagação, devemos ser capazes de, em algum sentido, estar cientes da subjetividade empregada, no que concerne as análises e resultados, já que o modo qualitativo de fazer pesquisa nos permite isso. Desta forma como menciona Bicudo (2011 p. 24) a pesquisa qualitativa pode ser entendia como "[...] um leque diversificado de procedimentos, sustentados por diferentes concepções de realidade e de conhecimento", buscando assim maximizar a qualidade da pesquisa efetuada.

Utilizamos ainda como procedimento, a pesquisa bibliográfica, visto que esta "[...] é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituídos principalmente de livros e artigos científicos" (Gil, 1999, p. 65). Nesse sentido olhamos para obras que abordam ou deram referências do tema por nós estudado.

Levando-se em consideração que nos debruçamos sobre obras que trazem em seu escopo, discussões sobre filosofia no que concerne as três escolas (Logicismo, Intuicionismo e

Formalismo) delimitamos unidades de leituras nas obras analisadas, já que estas podem ser compreendidas como, "os limites no interior dos quais se processará a disciplina do trabalho de leitura e estudo em busca da compreensão da mensagem" (Severino, 2007, p. 54). Por fim efetuamos, ainda que não aprofundadamente, uma na análise textual, entendida como o

> [...] processo de reconhecimento de determinada realidade e implica o exame sistemático dos elementos; portanto, é decompor um todo em suas partes, a fim de poder efetuar um estudo mais completo, encontrando o elemento-chave do autor, determinar as relações que prevalecem nas partes constitutivas, compreendendo a maneira pela qual estão organizadas, e estruturar as ideias de maneira hierárquica (Marconi, Lakatos, 2005, p. 27-28)

Tal análise, revelou-se importante já que a partir dessas compreensões de relações constitutivas, identificamos aspectos tidos como essenciais das três grandes escolas filosóficas. Ainda pudemos explicitar como esses aspectos se inter-relacionam com as práticas de ensino no que diz respeito a determinado conteúdo, instrumentos pedagógicos, postura dos professores.

É valido mencionar, também, que os apontamentos, referentes às três escolas citadas, não são exaustivos, no entanto, são relevantes e permitem responder à questão estabelecida, ainda que careça de aprofundamentos futuros. Assim optamos por sustentar este artigo sob os estudos de Mondini (2008), Machado (2005), Eves (2004), Boyer (2010) e Kessler (2001).

Sobre as escolas do Formalismo, Logicismo e Intuicionismo

Foi a partir dos estudos desenvolvidos em torno de uma Matemática não só abstrata, mas teórica que podemos considerar "[...] a origem de um modelo que dá surgimento às Ciências, a Filosofia e a Matemática abstrata [...]" (Costa, 2008, p. 34).

Em Boyer (2010) e Eves (2004) é revelado que a busca pela consolidação da Matemática como ciência se deu no decorrer de séculos, onde ideias eram levantadas e refutadas com o mesmo fervor. Disputas por reconhecimento e concretização de teorias eram vulgarmente debatidas na sociedade matemática, na busca incessante pelo reconhecimento acadêmico. Essas disputadas se deram em razão de que em diversos períodos históricos era comum a prática de lançar desafios à comunidade dos matemáticos, visando premiações, reconhecimento e exaltação acadêmica.

As controvérsias e disputas foram tantas, que verdadeiras crises se instalaram no final do século XIX início do século XX. Um dos principais acontecimentos concerne à teoria dos conjuntos, assim intitulada "*la crisis de los fundamentos*"[1] como menciona Kessler (2001). A crise dos fundamentos, relacionada a Teoria dos Conjuntos, foi de "importância impar" visto que esta,

> [...] se transforma na questão central no interior das importantes controvérsias do início do século XX. Na tentativa de restabelecer credibilidade aos fundamentos da Matemática, surgiram três escolas principais: o Logicismo, o Intuicionismo ou Construtivismo e o Formalismo (Costa, 2008, p. 38).

A citação acima, nos remete a menção de Mondini (2008), quando esta expõe a necessidade de livrar a Matemática dos inúmeros paradoxos que a Teoria dos Conjuntos revelou.

---

[1] "A crise dos fundamentos" (Tradução nossa). A crise dos fundamentos traz relação com os paradoxos da Teoria dos Conjuntos, como também com as descobertas de contradições dessa mesma teoria. Para um melhor entendimento a respeito sugere-se a leitura dos trabalhos de Kessler (2001) e Costa (2008).

> Os paradoxos da teoria dos conjuntos conduziram os embates filosóficos ao clímax, que levou ao surgimento de três grandes escolas filosóficas da Matemática: a escola logicista de Rusell (1872 – 1970), a escola formalista de Hilbert (1862 – 1943) e a escola intuicionista de Brouwer (1881 - 1966) (Kessler, 2001, p. 237, tradução nossa)[2].

Cada uma das escolas, do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo, traziam adeptos de renome, como versa a citação de Kessler (2001), os quais buscavam defender a essência de cada uma, apresentando uma nova compreensão de como a Matemática deveria ser estruturada.

Segundo Mondini (2008) a escola do Logicismo tinha como meta a apresentação de uma Matemática em moldes completos, ou seja, uma Ciência pronta, em linguagem simbólica, almejando sua simplificação no que concerne sua apresentação.

Para o Logicismo, o cálculo lógico de Leibniz pôde e foi visto como uma ferramenta indispensável para formalização do pensamento dedutivo, como mencionado em Machado (2005). Bertrand A. W. Russell e Alfred N. Whitehead as duas maiores expressões da escola Logicista, em sua obra *Principia mathematica* evidenciaram sua busca na lógica a possibilidade de redução e derivação de toda a Matemática, já que a lógica, era vista como "[...] as leis fundamentais da razão, o pilar do universo" (Costa, 2008, 37).

> [...] Frege, Russell e a quase totalidade dos lógicos modernos adotam o princípio metodológico de que é possível, recorrendo-se unicamente a princípios lógicos, reduzir-se uma proposição não obviamente verdadeira a outras que assim o sejam (Machado. 2005, p. 26).

Conforme Eves (2004) e Machado (2005), as definições, proposições e demonstrações deveriam ser desenvolvidas a partir de princípios lógicos. Eves (2004, p. 677) destaca ainda que "a distinção entre a matemática e lógica passava a ser uma questão de conveniência prática".

As discussões que precederam os tempos "áureos" da escola Logicista, foram desde a Lógica normativa elementar, Lógica aristotélica até a Teoria dos Tipos de Russell. Levando em conta o contexto admitimos conveniente tomar propriedade do discurso utilizado por Eves (2004, p. 679), quando menciona que o sucesso ou fracasso dessa escola é uma questão de opinião, já que enquanto alguns consideram "[...] o programa satisfatório, outros levantam muitas objeções a ele". No entanto, podemos considerar que a escola Logicista, bem como seus estudiosos, deixaram importantes discussões no que concerne ao desenvolvimento da Lógica Matemática Moderna.

A segunda corrente que ganhou destaque com seus estudos veio na contramão do pensamento Logicista, os denominados Intuicionistas[3], tinham como base de seu "edifício teórico", a construção da Matemática a partir da intuição.

A escola Intuicionista tem em Kant suas raízes, no entanto L. E. J. Brouwer pode ser considerado sua maior representação. Este, segundo Machado (2005) aceita as concepções Kantianas de proposições que não são empíricas ou sintéticas *a priori* relativas ao espaço e ao

---

[2] Las paradojas de la teoría de conjuntos llevaron las pugnas filosóficas a cierto clímax, del que derivó el surgimiento de tres grandes escuelas filosóficas de la Matemática: la escuela logicista de Rusell (1872-1970), la escuela formalista de Hilbert (1862-1943) y la escuela intuicionista de Brouwer (1881-1966). (Kessler, 2001, p. 237)

[3] O intuicionismo foi uma das principais correntes do movimento construcionista. Os construcionistas acreditavam que todo e qualquer conhecimento deveria ser construído a partir da intuição (Mondini, 2008, p. 5).

tempo. Costa (2008, p.35), evidencia que Kant considerava que, a teoria do conhecimento, se dava "no terreno dos juízos sintéticos *a priori*", o que se fazia necessário para o enriquecimento, tal como para o progresso do conhecimento.

> Os objetos do mundo sensível situam-se no contexto espaço-temporal. Para Kant, é impossível conhecê-los sensorialmente, sem uma concepção inicial, a priori, do espaço e do tempo que se daria através da sensibilidade, para Kant, fruto de uma faculdade de intuição (Costa, 2008, p. 35).

Assim a intuição, oriunda dos atos de conhecimento próprios dos estados mentais dos sujeitos, conceitos, valores e sentimentos assumiria o papel de trazer a verdade das proposições matemáticas, não se restringindo somente à observação do que é exposto através dos sentidos no mundo externo, mas sim da razão introspectiva.

A escola Intuicionista de Brouwer assumia segundo Machado (2005), que a Matemática poderia ser construída através de métodos construtivos finitos, a partir dos números naturais, os quais são subsidiados aos sujeitos através de uma intuição fundamental.

Para os intuicionistas, toda Matemática deveria ser reconstruída, considerando que "[...] as entidades abstratas existiam somente quando eram construídas pela mente humana. Desse modo, o que não partisse da intuição não era Matemática" (Mondini, 2008, p. 5), ou seja, determinado objeto matemático só existiria caso pudesse ser efetuada sua construção.

A construção finita, proposta pelos Intuicionistas, acarretou em uma importante implicação por parte desses pensadores: a refutação do princípio do terceiro excluído, o qual segundo Morais Filho (2007, p. 28) pode ser enunciado como segue, "*uma sentença é falsa ou é verdadeira, não havendo uma terceira alternativa*". Desta forma, seria possível a construção de enunciados dotados de sentido, mas que não necessariamente fossem verdadeiro ou falso, apenas considerados logicamente, como pretendia o logicismo.

Eves (2004) faz uma importante observação, quando aponta que tal refutação se restringe para conjuntos infinitos, o que não se aplicaria para conjuntos finitos quando possível estabelecer a veracidade ou falsidade de determinada proposição, através de um número finito de passos.

Algumas teorias consideradas verdadeiras pelos matemáticos clássicos eram, do ponto de vista dos adeptos do Intuicionismo, falsas levando à dúvida e à rejeição das ideias Intuicionistas pelos matemáticos clássicos, conforme Mondini (2008).

Machado (2005, p.41) esclarece que não é passível de discussão que Brouwer de fato "[...] tocou na ferida, localizou efetivamente as raízes dos problemas que os formalistas enfrentavam ou viriam a enfrentar", já que o problema alocava-se justamente na distinção das contradições formais, no que tange o princípio do terceiro excluído, segundo o autor.

A terceira e última escola sobre a qual discorreremos traz em seu escopo as ideias dos filósofos que se sensibilizaram com as concepções Formalistas. Antes podemos aludir as breves discussões levantadas em torno das contribuições deixadas por Kant à escola Intuicionista. Os Formalistas buscaram sustentar suas primeiras ideias nas acepções de Kant, no entanto, ponderando que para ele, segundo Machado (2005), "[...] o papel que a Lógica desempenha em Matemática é o mesmo que desempenha em qualquer outro setor do conhecimento" (p.29), considerando sim que na Matemática os teoremas são sustentados por axiomas, levando-se em consideração as leis da Lógica.

Contudo, refutam a ideia proposta pelos Logicistas que esses mesmo axiomas e teoremas sejam apenas caracterizados como princípios lógicos ou decorrentes de tais princípios. Das concepções Kantianas do espaço e tempo, os formalistas acreditavam que os entes matemáticos fossem "[...] descritivos da estrutura dos dados da percepção sensível[...]"[4] (idem).

A escola Formalista teve em David Hilbert sua maior representação, esse adotou as ideias de Kant e a partir daí "inaugurou solo" sobre o qual se desenvolveria o pensamento filosófico fundamental, propondo inicialmente que:

> a) a Matemática compreende descrições de objetos e construções concretas, extralógicas;
>
> b) estas construções e esses objetos devem ser enlaçados em *teorias formais* em que a Lógica é o instrumento fundamental;
>
> c) o trabalho do matemático deve consistir no estabelecimento de teorias formais consistentes, cada vez mais abrangentes até que se alcance a formalização completa da Matemática (Machado, 2005, p. 29).

Mondini (2008) menciona, que o objetivo primeiro do Formalismo era provar que as ideias matemáticas estavam isentas de toda e qualquer contradição, vislumbrando para isso à axiomatização da Matemática, tendo como objetivo principal livrar a Matemática dos paradoxos que assombravam os pesquisadores da época. Para este fim, os formalistas buscavam reescrever a Matemática através de demonstrações rigorosas, provas irrefutáveis em um sistema formal.

Conforme Costa (2008), Hilbert empregou as ideias de Kant para fins de extinção dos paradoxos, ele buscava a construção de "objetos" matemáticos através da lógica como instrumento fundamental, não como propunha os Logicistas que buscavam reduzir a Matemática em termos lógicos como já foi discutido. Os formalistas assumiam a lógica como método capaz de legitimar seus resultados. Buscavam também a expansão das teorias formais, no intuito de formalizar por completo toda a Matemática.

Diante das propostas e descobertas levantadas pelos Formalistas, obviamente, fervorosos embates ganhavam consistências nas academias frente às teorias alçadas pelos estudiosos. De fato a escola Formalista não passou ilesa por esses embates, segundo Machado (2005) e Mondini (2008), coube a Kurt Gödel, o papel de algoz de Hilbert, quando,

> [...] provou a impossibilidade de demonstrar a compatibilidade dos axiomas da Aritmética dentro de um sistema que inclua a Aritmética. Com isso, provou também que o projeto de Hilbert não poderia ser bem sucedido, "porque não é possível provar a consistência da Matemática dentro da própria Matemática" (Mondini, 2008, p. 7-8).

Assim, as pretensões formalistas de obter inferências legítimas de um sistema formal completo e consistente, como visionava Hilbert, não se sustentaram.

---

[4] Compreendemos que tal inferência pode ser compreendida como o princípio do nominalismo "[...] segundo o qual as entidades da Matemática não existem, nem como objetos reais e nem como objetos mentais. No formalismo "as deduções são cadeias de transformações de expressões simbólicas segundo regras explícitas de manipulação de símbolos" (Silva, 2007, p. 184). As deduções e as transformações da Matemática, ao mesmo tempo em que eram passíveis de interpretação por quem as manipulava, tinham um significado explicitado em um sistema formal que estava se constituindo (Mondini, 2008, p 6-7).

Ensino de Matemática: Influências das escolas

A partir do exposto, consideramos relevante apresentar um quadro síntese das concepções/características que consideramos primordiais sobre cada uma das escolas. Esboçando a partir de cada uma delas a compreensão de sujeito, no sentido do papel epistêmico que exerce na produção do conhecimento, e de objeto matemático no que tange o Ensino da Matemática. Ressaltamos que as ponderações, emergem de nossas interpretações sobre o material lido. Destacamos ainda a importância do quadro no sentido de facilitar a apreensão das respectivas concepções, além de promover uma melhor subdivisão para cada uma das escolas como apresentado no quadro 1. Esse quadro representa, ainda, o nosso esforço de síntese, conferindo uma discussão relativamente original sobre o assunto, que articula as escolas filosóficas ao ensino de Matemática.

Quadro 1

Síntese das características principais da escola do Logicismo e algumas considerações sobre o sujeito do conhecimento e objeto matemático[5].

Logicismo	
Concepções/Características	**Inferências**
Utiliza dos princípios da lógica	De forma geral, podemos identificar que muitos exercícios reproduzidos em salas de aulas, bem como em cursos de formação, partem de princípios lógicos, no intuído de justificar a solidez da Matemática como Ciência. Visando na lógica um “porto seguro”, onde se possa justificar quase que todo questionamento a ser enfrentado na sala de aula ou fora dela. Essa visão atribui à lógica um valor de verdade imanente, independente do sujeito do conhecimento.
Demonstrar a partir das leis gerais da lógica	As demonstrações em sua grande maioria partem sempre de princípios lógicos, no entanto muitas demonstrações perdem-se dentro de seus próprios resultados; fato que pode se dar pela complexidade de seus argumentos lógicos. Os professores (sujeitos) por sua vez ou evitam demonstrações, no que diz respeito ao Ensino Fundamental ou preferem deixar que os alunos (sujeitos) explorem o “universo” matemático existente no âmbito dessa complexidade. No entanto, os alunos nem sempre são capazes de desenvolver esse papel de “explorador”, e optam simplesmente por memorizar os passos necessários para mostrar a veracidade de determinado ente matemático. Ficando para um segundo, terceiro ou enésimo plano a compreensão e relação da matemática.

[5] As concepções presentes nos quadros 1 ,2 e 3, são fragmentos identificados nos textos de Eves (2004), Machado (2005) e Mondini (2008).

Toda proposição matemática pode ser expressa na termologia da lógica	Comumente podemos identificar ocorrências com essas características, tanto em livros didáticos que reduzem a acepção de termos matemáticos à lógica, como também nos cursos de formação, caso dos cursos de Matemática. Em ambos revela-se o estabelecimento de uma linguagem que se pretende pura e universal, preocupando-se quase que exclusivamente com reprodução linguística do objeto, que muitas vezes é o anseio dos professores (sujeito) nos diversos níveis de formação. Por vezes os alunos (sujeitos) encontram-se obrigados a personificar seu raciocínio em termos lógicos, para os mais diversos exercícios, como se a argumentação literal fosse um procedimento inválido no âmbito das Ciências Exatas, como se a falta de signos matemáticos invalidassem qualquer resultado e argumentação bem construída.
Enunciação de teoremas matemáticos por meio de um simbolismo lógico	A característica elencada pode ser identificada em diferentes níveis de ensino, como no Ensino Fundamental e Superior. Pode-se justificar a manifestação dessa característica pela herança matemática lógica que os livros didáticos trazem em seu escopo. E a qual os professores (sujeitos) persistem em reproduzir em sala de aula. Muitas vezes os próprios não compreendem a sobrecarga de signos dos enunciados. Quanto aos alunos (sujeitos), cabe a tarefa de interpretação e abstração das mensagens oriundas dos "códigos". E enquanto sujeitos do conhecimento, acabam sendo relegados a enunciação memorística destes teoremas.
Todos os conceitos de matemática tem que ser formulados em termos de conceitos lógicos e todos os teoremas da matemática tem que ser desenvolvidos como teoremas da lógica	Percebe-se a manifestação mais intensa da escola Logicista, quanto à busca pela redução de todos os teoremas e conceitos em termos lógicos. De fato podemos pensar que a Matemática carrega intrínseca em si, muito da concepção Logicista, o que pode ser identificado em diferentes contextos, como sala de aula, material didático ou a própria explanação dos professores (sujeitos) em sala de aula, buscando argumentos lógicos no tratamento de problemas, questionamentos, desenvolvimentos de atividades. No entanto, ressaltamos que o processo criativo tanto no que concerne aos professores quanto aos alunos (sujeitos) perde espaço, tendo-se a impressão que discussões, atividades e metodologias contextualizadas, mas não de caráter estritamente lógico, não apresentassem sentido algum.

Fonte: os autores.

Na sequência passaremos à apreensão das principais características da escola Intuicionista, buscando versar sobre as concepções de sujeito do conhecimento e objeto matemático como apresentado no quadro 2.

Quadro 2

Síntese das características principais da escola do Intuicionismo e algumas considerações sobre o sujeito do conhecimento e objeto matemático.

Intuicionismo	
Concepções/Características	**Inferências**

A matemática deve ser construída a partir da intuição[6]	Consideramos que é corriqueira, em diversas situações, uma primeira interpretação intuitiva de determinado ato (uma intenção de se relacionar com o objeto), uma intuição que opera sobre o exterior (real) onde o sujeito apresenta consciência da sua relação com o objeto, onde as “entidades matemáticas” não existem por si mesmas a não ser que sejam construídas pela mente humana, ou seja, de que a existência de tal objeto é equivalente a possibilidade de sua construção. Assim o professor assume o papel de gerenciar essa relação entre a intuição e a construção de entidades matemáticas, as quais serão capazes ou não de dar conta de determinado problema matemático por exemplo, podemos inclusive identificar uma relação entre lógica e intuição que se manifesta no pensamento estabelecendo relações que visam a veracidade dos argumentos transposto para realidade. Paralelamente a responsabilidade docente, tem-se a impressão que os alunos deixam de realizar essa interpretação intuitiva primeira, passando a aplicações imediatistas quando defrontados com atividades matemáticas que exijam reflexões mais profundas.
Encarrega a intuição resultante da introspecção de evidenciar a verdade das proposições matemáticas	Tudo que está a nossa volta, mesmo que inconscientemente, contribui de certa forma para a constituição do sujeito no mundo, além de considerar que o conhecimento que adquirimos das experiências que temos no dia a dia são fundamentais para as relações que estabelecemos durante a vida. Entretanto as relações que desenvolvemos, os atos primeiros que tomamos, ganham sentido e se fazem coerentes em um “plano” diferente do real, a intuição introspectiva daria conta de administrar tudo isso, já que procedemos uma auto reflexão dos valores, dos conceitos dos sentimentos que manifestamos. A Matemática também pode ser administrada nesse ambiente, ganhando forma e sentido, visando uma construção para o real do que antes foi intuitivo.
Renuncia a lei do terceiro excluído de que uma proposição ou é falsa ou é verdadeira	A suposição de que uma proposição matemática é necessariamente verdadeira ou falsa é quase que dogmática no que se refere ao ensino da Matemática. No entanto, o princípio Intuicionista admitia a negação de tal fato, levando-se em consideração que enunciados poderiam ser construídos, desde que dotados de sentido, não levando-se em conta a lei do terceiro excluído, tão pouco a lei da não contradição, ou seja sendo possível que estes fossem verdadeiros e falsos ao mesmo tempo. No que tange o ensino da Matemática, podemos considerar que muitos alunos (sujeitos) mal conseguem estabelecer relação dos fundamentos desses princípios com os resultados que buscam em suas resoluções, isso quando compreendem ou sabem que tais leis existem, fato esse que não é restrito a Educação Básica. Cabendo ao professor (sujeito), identificar “sentido” nas resoluções muitas vezes propostas de forma mecânica e sem significado.

[6] O termo – intuição – pode ter múltiplas interpretações, dependendo do contexto, no intuito de clarificar essa acepção sugerimos ver Japiassú e Marcondes (2001) e Meneghetti, (2009). Ressaltamos ainda que, – intuição – para os intuicionistas tem significado distinto do senso comum.

Para provar a existência de uma entidade é preciso mostrar que ela é construtível em um número finito de passos	Fazendo alusão aos diversos argumentos que utilizamos quando buscamos "atacar" determinado problema, ou seja, buscamos estudar uma forma eficiente para sua resolução, estudo que se manifesta muitas vezes, intuitivamente, na sequência buscamos a elucidação de nossas ideias (sujeitos professor/aluno). No caso de atividades matemáticas, uma demonstração, por exemplo, buscamos a apresentação das resolução quase que de forma descritiva, visando deixar claro cada passo tomado, cada argumento levantado na resolução, característica essa que muitas vezes herdamos dos cursos de formação ou das escolas do Ensino Básico.

Fonte: os autores

Por fim, passamos as considerações referentes a última escola filosófica, o Formalismo, a qual, assim como para as anteriores, descreveremos no quadro 3.

Quadro 3

Síntese das características principais da escola do Formalismo e algumas considerações sobre o sujeito e objeto matemático.

Formalismo	
Concepções/Características	**Inferências**
As ideias matemáticas são isentas de contradições	Essa concepção está fortemente enraizada no pensamento do homem. Esse fato pode se dar pela concepção que fomos levados (enquanto alunos) a acreditar, comumente escutamos frases como - "a matemática é uma Ciência Exata" - no sentido mais amplo da palavra, perfeita, inexorável, incapaz de cometer erros, apresentando um universo seguro para aqueles que a dominam com brilhantismo. No entanto, o ensino da Matemática está muito além dos discursos perfeccionistas de alguns professores (sujeitos), carrega consigo a responsabilidade de formar pensadores críticos que sejam capazes de transitar entre o brilhantismo e a opacidade, vendo significados nos erros. No entanto, isentá-la de toda e qualquer contradição é inapropriado do ponto de vista da construção do objeto matemático. O objeto matemático ser estável não quer dizer que a construção das ideias sobre ele também o seja.

Reescreve a matemática através de demonstrações rigorosas em um sistema formal	A Matemática é carregada no interior de sua história com anedotas que provocaram verdadeiros alvoroços na comunidade que outrora promoveu seu desenvolvimento. Isso tudo se dava pela busca da hegemonia dos sistemas formais, pela solidez do pensamento matemático. Os processos de demonstrações são de fato tidos como essenciais, principalmente quando se fala no âmbito dos cursos de Nível Superior, em que o desenvolvimento lógico, a articulação do pensamento matemático e a precisão na utilização dos objetos matemáticos devem estar em razoável sintonia. Para alguns professores (sujeitos) têm-se um bom acadêmico, (seja de um curso de Licenciatura seja de Bacharelado), quando este sabe demonstrar com primazia, independendo se o aluno estabelece relações de sentido no que se demonstra, se o aluno de fato compreende o que está fazendo. É comum encontrarmos professores que “treinam” seus alunos como quem treina um atleta para determinada tarefa, os exercícios são jogados aos montes para os alunos e esses devem reproduzir quase que de forma instantânea os procedimentos de resolução, uma forma de “receita de bolo”, comum em cursos pré-vestibulares por exemplo. No entanto essa amarra imposta tolhe a capacidade intelectual do aluno de argumentar, de levantar hipóteses, de aprender com os próprios erros de admitir outras formas de expressão da Matemática. A transposição imediata deste princípio para o ensino mutila, tanto a compreensão do objeto matemático, como do sujeito do conhecimento.
Conjunto de regras e símbolos que permitem operar mecanicamente Estudo dos sistemas simbólicos formais	A Matemática traz em si uma excessiva diversidade de signos, dos quais muitas vezes os alunos não fazem ideia de como utilizá-los ou se quer o significado de determinado símbolo. Para tanto, vislumbra-se um estudo formal dos símbolos, logo nos primeiros contatos que o aluno estabelece com a Matemática, devem ser apresentados as diferentes ferramentas que serão necessárias para o bom desenvolvimento do aluno (sujeito) durante sua carreira acadêmica. Alguns exercícios trazem enunciados tão complexos que aparentam tomar características de uma nova linguagem (o que de fato é), da qual os alunos se mostram, muitas vezes, incapazes de compreender, quanto mais operar com tal simbologia. Diante do exposto, ponderamos a árdua tarefa do professor (sujeito) de explicar, clarificando o amontoado simbólico que os alunos precisarão dominar para compreender o mínimo da Matemática que os rodeia. No entanto salvo aqueles que fazem jus aos aprendizados, temos os alunos que não estabelecem significados aos diferentes elementos apresentados, para estes restam a “didática da boa memória,” provando serem capazes de reproduzir resultados e demonstração com primazia, ainda que não estabeleçam sentido e compreensão alguma do que demonstrou ou resolveu, reduzindo-se a um aprendizado mecânico em que o objeto matemático não lhe atribui sentido algum.
Estabelecer teorias formais consistentes cada vez mais abrangentes até alcançar a formalização total da matemática	A escola (levando-se em conta os diferentes níveis de ensino Escola Básica/Ensino Superior) como formadora, espera que os professores (sujeitos) sejam capazes de construir o arcabouço teórico de seus alunos (sujeitos) e que estes alunos consigam sistematizar a Matemática, vislumbrando uma articulação tão sólida capaz de dar conta de todo e qualquer problema, não dando margem para possíveis paradoxos dentro da Matemática.

Fonte: os autores.

Frente ao exposto podemos ter uma melhor compreensão das escolas do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo no âmbito da Matemática, bem como compreender a manifestação destas sobre o Ensino de Matemática.

Algumas considerações

O desenvolvimento da Matemática como ciência se deu por diversas contribuições, tal como o desenvolvimento de outras Ciências. A Matemática, como apresentado no decorrer do texto, deve sua engenhosidade a três grandes escolas: Logicista, Intuicionista e Formalista, que refletem seus estudos nos diversos campos em que se ramifica a Matemática, como a Pura, Aplicada e Educação Matemática. A partir desse interesse primeiro de compreender como se deu esse desenvolvimento, e dando ênfase ao que pode se revelar no que tange ao Ensino de Matemática, subsidiamos nossas ponderações apoiados na pergunta diretriz "*Quais as implicações das escolas do Formalismo, Intuicionismo e Logicismo no ensino de Matemática?*" assim pudemos compreender quais as concepções constituintes em cada escola. Resumidamente revelou-se o que apresentamos do quadro 4.

Quadro 4

Concepções das escolas do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo.

Escola Filosófica	**Concepção**
Logicismo	Reduzir a Matemática em termos lógicos, propondo, demonstrar analiticidade de determinada proposição a partir das leis gerais da lógica.
Intuicionismo	A Matemática deve ser sistematizada partindo sempre da intuição. Para tanto utiliza-se de um número finito de passos, a partir dos números naturais, "métodos construtivos", dados intuitivamente.
Formalismo	Formalizar toda a Matemática Clássica em um sistema formal consistente e completo, utilizando demonstrações procedendo a axiomatização de toda Matemática.

Fonte: os autores.

Foi possível identificar características, próprias em cada escola, como apresentado no decorrer do texto, cada uma com sua particularidade e que de certa forma se entrelaçam no contexto da Educação Matemática. Assim podemos considerar que, por exemplo, a primeira escola que apreciamos, a Logicista, atribui a fatores extra-temporais a existência da Matemática. A Intuicionista, por sua vez, atribui ao sujeito que conhece, já a escola Formalista pode ser compreendida como uma posição intermediária entre as outras duas. Essa é uma leitura interessante de se fazer ao pensar a "natureza" do conhecimento científico.

No entanto, quando estabelecemos relações com o ensino, podemos destacar características que transitam em um ambiente de coexistência. Esse ambiente se dá, quando pensamos, por exemplo, no desenvolvimento de uma demonstração, uma vez que podemos assumir contribuições deixadas pelas três escolas, como uma intuição primeira quando acreditamos que algo é passível de construção, visando traçar estratégias para desenvolver o pensamento lógico, os procedimentos lógicos, axiomas e resultados já demonstrados dos quais utilizaremos para mostrar a veracidade de determinado objeto, bem como a formalização através de princípios lógicos e escrita formal. Todavia não podemos generalizar que toda demonstração se desenvolva dessa forma. Poderíamos apresentar diversos enunciados de exercícios, bem como suas resoluções que acabam por tomar propriedade de conceitos de uma ou mais escola, no entanto tais apresentações não se fazem necessárias em nosso entendimento, visto que nosso objetivo foi a compreensão das implicações dessas diferentes filosofias no ensino da Matemática.

As discussões fomentadas no que tange as características e concepções, a partir das três escolas filosóficas, manifestam-se de diferentes formas no ensino da Matemática, como por exemplo, as abordagens de determinados conteúdos matemáticos, a postura docente diante dos enfrentamentos das salas de aula (diversas situações que podem ocorrer como, questionamentos, dúvidas, argumentações, explicações, metodologias adotadas pelos professores entre outros), a apresentação de determinados exercícios pelos professores e livros didáticos, ou o que as instituições de ensino almejam de seu corpo docente e discente. Assim compreendemos que o pensar pedagógico, no que se refere às práticas docentes em todos os níveis de ensino, carecem de reflexão. A compreensão – mesmo que básica – a respeito de cada uma das escolas e de suas doutrinas se faz necessária, pois entendemos que tal conhecimento promove uma seguridade ao fazer prático do profissional.

Por fim, podemos considerar que a Matemática se constituiu da contribuição de diversos pensadores, que com seus estudos idealizaram uma Ciência capaz de responder uma diversidade de problemas, além de subsidiar outras Ciências. Destacamos, no entanto, que a interpretação de perfeição ou não da Matemática, bem como sua exatidão cabe ao sujeito que a estuda. O que podemos considerar é que a Matemática, como a conhecemos hoje, emerge das contribuições deixadas outrora pelo modo de pensar dos filósofos e pelas reestruturações internas da Ciência Matemática. E que o ensino de Matemática não é isento. As contribuições destas escolas, no âmbito da Matemática, podem se constituir em entraves às perspectivas do Ensino de Matemática. Por isso, uma avaliação crítica das escolas se faz necessária.

Referências e bibliografia

Bicudo, M. A. V. (2011). *Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica.* São Paulo: Cortez.

Boyer, C. B. (2010). *História da Matemática* (Prefácio de Isaac Asimov revista por Uta C. Merzbach. Tradução: Elza F. Gomide, 3ª ed.). São Paulo:Blücher.

Costa, C. F. da. (2008). *Por que resolver problemas na educação matemática? Uma contribuição da escola de Gestalt* (Tese de Doutorado). 220 f. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ.

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática.* Campinas, SP: Editora da Unicamp.

Garnica, A. V. M. (1997). *Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia.* Interface – comunic, saúde, educ. 1. Agosto de 1997.

Gil, A. C. (1999). *Métodos e técnicas de pesquisa social* (5ª ed.). São Paulo: Atlas.

Japiassú, H., & Marcondes, D. (2001) *Dicionário básico de filosofia* (3ª ed.). Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Machado, N. J. (2005). *Matemática e realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática* (6ª ed.). São Paulo: Cortez.

Meneghetti, R. C. (2009). *O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático*: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática. *Bolema, 22*(32), 161 – 188. Rio Claro – SP, Mondini, F. (2008). O logicismo, o formalismo e o intuicionismo e seus diferentes modos de pensar a matemáitca. In *XII EBRAPEM*, 2008, Rio Claro. Anais do XII Ebrapem.

Morais Filho, D. C. de. (2007). *Um convite à matemática: fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades* (2ª ed.). Campina Grande, EDUFCG.

Santos, B. de S.(1989). *Introdução a uma ciência pós – moderna*. Rio de Janeiro: Graal.

Tambarussi, C. M., & Klüber, T. E. (2014). *Focos da pesquisa stricto sensu em Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira: considerações e reflexões. Educ. Matem. Pesq., 16*(1), 209-225. São Paulo.

Kessler, W. O. B. (2001). *Algunos aspectos epistemológicos de da matemática:* ¿Es la matemática un lenguaje? *Educere, 5*(14), 236-240. Universidad de los Andes Venezuela, jul-set.

Klüber, T. E.; Burak, D. (2008). *Concepções de modelagem matemática:* contribuições teóricas. *Educação, Matemática, Pesquisa, 10*(1), 17-34. São Paulo