ETM de la noción de tangente en un ámbito grafico
Cambios de dominios y de puntos de vista[1]

Elizabeth **Montoya** Delgadillo
IMA PUCV
Chile
emontoya@ucv.cl
Laurent **Vivier**
LDAR P7
France
laurent.viver@univ-paris-diderot.fr

Resumen

En esta investigación presentamos la concepción de tangente desde un enfoque gráfico que poseen estudiantes chilenos de primer año universitario en una carrera de Matemáticas, y una vez que ellos han inicializado sus estudios de derivada. Confrontamos estos resultados con los puntos de vista local, global y puntual, perspectiva característica en la enseñanza del análisis. Mostraremos resultados que la concepción intuitiva que poseen los estudiantes de tangente no basta para construir el concepto de derivada, la cual es una noción fundamental en el análisis y por sobre la cual reposa esta noción a nivel de enseñanza. Los análisis se sustentan con el modelo de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011) y serán discutidos y confrontados en un taller, incluyendo un análisis implicativo entre variables involucradas.

Palabras clave: tangente, derivada, local-global.

Introducción

La Enseñanza del Cálculo (o Análisis para algunos países) comienza a fines del liceo por lo general con un énfasis en lo calculatorio, pero en la universidad es donde se estudian con mayor profundidad conceptos basales de este dominio de la matemática como límite,

[1] Este trabajo está bajo el sustento del proyecto ECOS-Sud C13H03.

continuidad, derivadas, integrales, y las respectivas extensiones cuando se pasa a $\mathbf{R}^n$ u otros conjuntos. Sin embargo, el pasaje que realizan los estudiantes de una institución a otra, el grado de abstracción que se aborda al dejar enfoques algoritmizados, y en definitiva las "discontinuidades" entre nociones matemáticas hacen entre otros elementos que existan verdaderos obstáculos y fracasos en el aprendizaje del Cálculo.

Diversas investigaciones (ver por ejemplo Tall, 1991; Artigue, 1998) y con distintas aproximaciones teóricas han dado cuenta de la dificultad en el aprendizaje en el dominio del Análisis. Al respecto, ya hace 15 años atrás Artigue (1998) categorizó la existencia de dificultades persistentes de los estudiantes en el campo conceptual del Análisis, distinguiendo: dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos de este campo conceptual, las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de límite, que es la noción central del campo, y a su dominio técnico; dificultades ligadas a la necesaria ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico.

Es justamente en esta última categoría de dificultades donde nosotros hemos identificado una ruptura en el aprendizaje del análisis, y se refiere a la reconstrucción de objetos matemáticos en los que se tiene un conocimiento empírico y mediante el cual se sustentan en la enseñanza otros objetos matemáticos centrales del análisis como lo es la derivada. Explícitamente, nos referimos a la tangente, objeto matemático que se introduce en el nivel 8 (13 años) en la escuela en Chile.

Nos parece un fenómeno interesante de estudio, que la derivada reposa sobre la idea geométrica de la recta tangente, noción que se estudia empíricamente como un elemento auxiliar de la circunferencia, en el cual existe la idea "intuitiva" que la recta tangente solo tiene un punto en común con la curva (una famosa concepción, conocida desde mucho tiempo, ver por ejemplo (Sierpinska 1985)).

Retomando los trabajos de Vinner (1991) y de Castela (1995), la investigación de Páez y Vivier (2013) ha permitido identificar las diferentes concepciones de la noción de tangente, incluso concepciones globales y locales que constituyen una dialéctica característica del dominio del análisis introducida por Maschietto (2002) para la ingeniera didáctica realizada. Sin embargo, en esta investigación analizaremos la concepción del estudiante frente a la noción de tangente en el momento que ellos estudian el concepto de derivada en la universidad en un curso de Cálculo. En este estudio, el referente teórico es el Espacio de Trabajo Matemático, ETM, propuesto por Kuzniak (2011), y enriquecemos el modelo de Kuzniak con los *puntos de vistas* de Vandebrouck (2011) para las funciones que extendemos a otros objetos del análisis (Estrella y al. 2015).

En el Análisis muchas veces se trabaja con propiedades locales que se contrapone al pensamiento algebraico, pero en este trabajo, introducimos el tratamiento de la dialéctica global/local desde un dominio geométrico en un registro gráfico para el caso de las tangentes con una atención a los cambios de dominios (Montoya y Vivier 2014), específicamente en el dominio del análisis con las funciones.

Presentación del ámbito de los ETM

Esta investigación se inscribe en la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático, ETM (Kuzniak, 2011) que en sus inicios fue conocida como teoría de Paradigmas y Espacio de Trabajo Geométrico (Houdement & Kuzniak, 2006). En la actualidad, este constructo considera un ETM que depende de un dominio matemático (Kuzniak, 2011) como el análisis, la geometría, el álgebra, las probabilidades, etc. Los paradigmas son la caracterización del ETM en un dominio específico, esto es, hablaremos de los paradigmas geométricos, los paradigmas del análisis, etc, (ibid.).

Se distinguen tres tipos de ETM, a saber: el **ETM de referencia**, que está definido según la relación con el saber, idealmente bajo criterios matemáticos; un **ETM idóneo**, el cual depende de una institución, y que es definido según la manera que este saber se enseña en la institución con una función específica; **un ETM personal** que depende del individuo y definido para la manera que el individuo se enfrenta a un problema matemático, con sus propios conocimientos y capacidades cognitivas.

En el ETM se concibe la reflexión como el fruto de la interacción entre un individuo y los problemas en geometría (o análisis, álgebra, etc.) es un ambiente organizado por y para el geómetra o algebrista, etc. mediante la articulación de dos planos: el epistemológico y el cognitivo (Kuzniak, 2011).

El *plano epistemológico* está compuesto por tres polos, a saber: el *referencial* que está constituido por las propiedades, los teoremas, las definiciones, el *representamen* (signos semióticos), y los *artefactos* (elementos materiales o simbólicos). El *plano cognitivo* se compone de los procesos de *visualización, construcción y prueba*. Los planos se articulan mediante tres génesis como se observa en la figura 1: una *génesis semiótica* basada sobre los registros de representación semiótica que confiere a los objetos tangibles del ETM un estatus de objeto matemático operacional; una *génesis instrumental* que permite de operacionalizar los artefactos en el proceso de de construcción; una *génesis discursiva* de la prueba que da sentido a las propiedades para dejarlo al servicio del razonamiento matemático.

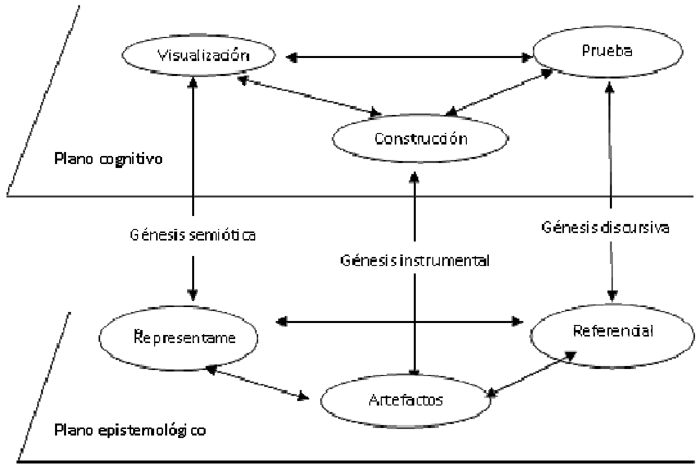


Figura 1. El espacio de trabajo Matemático y sus génesis (Kuzniak, 2011).

Esta articulación no debe ser entendida como la unión individual entre las componentes de los planos epistemológico y cognitivo, sino más bien como una relación activa conjuntamente por dos o incluso tres génesis (Kuzniak y Richard (2015) identificaron tres planos *verticales*).

Para el investigador, es importante identificar la génesis activada por un profesor (ETM-idóneo), o las génesis privilegiadas por un alumno en la realización de una tarea matemática (ETM-personal) para entender el trabajo matemático.

El ETM de referencia del Análisis (ETM_A) es guiado globalmente por el Análisis estándar, y caracterizado con los tres paradigmas siguiente identificados en (Estrella y al. 2015):

Análisis-Geométrico/Aritmético (**AG**) que permite interpretaciones, con implícitos, nacidas de la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real.

Análisis-Calculatorio (**AC**) donde las reglas de cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos.

Análisis-Infinitesimal (**AI**) es caracterizado por un trabajo de aproximación y de proximidad: cotas, una entrada a trabajos de proximidad (o una entrada más topológica): "cerca de ε", "lo despreciable".

Vandebrouck (2011) identificó tres puntos de vista que juegan un rol importante en el trabajo sobre funciones: puntuales, locales y globales. En este sentido, nosotros nos apoyamos en el punto de vista de Vandebrouck para el objeto tangente.

El punto de *vista puntual* asociado a un punto de la tangente (una correspondencia $M \rightarrow T_M$). Esto es lo que uno puede ver si existe la derivada en un punto (calcular la ecuación de la recta tangente con $f(x_0)$ y $f'(x_0)$ en un paradigma AC), por ejemplo cuando se "pulsa" sobre el botón "tangente" de Geogebra sobre el punto de la curva en cuestión o cuando se considera la "perpendicular al radio" para el caso de un círculo. El punto esencial es que la tangente pasa por un punto, y se puede añadir una propiedad que *encapsula* un otro punto de vista sin que sea explícito.

El punto de *vista global*, es la percepción de la tangente como una recta con una ecuación (paradigma AC) o una traza gráfica rectilínea (paradigma AG).

El punto de *vista local* está más relacionado con el paradigma de la AI, que se basa en el hecho de que la tangente y la curva son localmente fusionados (propiedad de micro-linealidad de Maschietto (2002), también con claros vínculos con el análisis no estándar), posiblemente con una aproximación tomando dos puntos cercanos. También se puede pensar en que se "pegan" o "tocan", aunque esto también puede estar asociado a un punto de vista puntual de un punto crítico.

Es pertinente considerar que para definir la tangente, es necesario considerar estas tres perspectivas, cada uno centrado en distintos aspectos. Específicamente, cada punto de vista, activa diferentes génesis del ETM y es frecuentemente necesario pasar por estos tres puntos de vistas para determinar una tangente.

Por ejemplo, una tarea en el registro gráfico como es lo que estamos estudiando, la génesis semiótica se activa de forma diferente y, específicamente, a través de: (1) el punto de vista global por la visualización de una traza gráfica rectilínea que se *prolonga infinitamente* (notemos también que se activa la génesis instrumental con el artefacto "regla"); (2) el punto de vista local por la visualización sobre una pequeña porción de la curva; (3) el punto de vista puntual al considerar el punto donde debemos determinar la tangente.

Es posible que un punto de vista esté ausente o defectuoso, provocando oposición o dificultades para resolver una determinada tarea en un dominio específico. A continuación, se espera que en estos casos, los cambios de dominio (Montoya y Vivier 2014) posean recursos de *puntos de vistas* disponibles en el nuevo dominio, que pueden estar vinculados a diferentes paradigmas (y que eventualmente los nuevos puntos de vista también pueden ser débiles). En nuestro estudio, específicamente esperamos cambios de dominio de la geometría para el análisis (paradigma AC principalmente para la población de estudio).

Análisis a priori

Tomamos las ideas principales de tangente realizadas en otros estudios (Castela, 1995; Páez y Vivier, 2013; Vinner 1991; Sierpinska 1985). En particular, la concepción global es bien conocida y nosotros esperamos encontrar algunas respuestas. Esto está relacionado con una percepción antigua de tangente, válida al menos para las cónicas: una tangente es una recta que tiene un único punto de intersección con la curva. También se puede interpretar como una depreciación del punto de vista local y una preponderancia de los otros dos puntos de vista con una especie de inyectividad de la correspondencia $M \rightarrow T_M$ del punto de vista puntual.

Presentamos a continuación los criterios de nuestra codificación en conjunto con un análisis a priori de la curvas Las curvas sin respuesta se codifica NR por *No Respuesta*. Además, se usan: **ne** por la respuesta *no existencia*, y **O**, por *Otro* para designar una respuesta que no aparece en los otros códigos, o en el caso de respuestas ambiguas (como A19 #8) o con una alternativa (como A25 #8 y #10). Por último, los estudiantes se identifican con A1 a A49 y las curvas de #1 a #12.

Nosotros planteamos como hipótesis que si hay un cambio de dominio es por encontrar argumentos para apoyar una conjetura proveniente de una percepción visual. Cabe señalar que los estudiantes a menudo perciben que hay una tangente, pero la situación específica planteadas en las curvas los pueden hacer errar o dudar en sus respuestas.

En las situaciones propuestas, la visualización juega un rol preponderante. La *visualización* es el primer proceso que es seguido por una *construcción* (principalmente para la existencia) o sea por una *prueba* (por una no-existencia). Una *prueba* es solicitada principalmente en una respuesta de no existencia, por ejemplo, con una concepción global o bien en un cambio de dominio se afirma la no diferenciabilidad. Sin embargo, una génesis discursiva se puede activar en el caso de una situación problemática como en las curvas localmente rectilíneas.

Curvas #1, #3 y #7

Estas curvas no deberían tener ningún problema, ellas no permiten identificar la concepción global, las curvas son regulares en cada uno de sus puntos - esperamos un 100% de éxito en las respuestas de la población de estudio. La #1 es la curva representativa de una función si nos imaginamos los ejes como se representan habitualmente (un eje horizontal y un eje vertical). El #2 no es representativo de una función, pero es un círculo, la primera curva por la cual se enseña la tangente. Es posible que se muestre el centro y radio del círculo reducida a la definición geométrica *perpendicular al radio* (rol del polo teórico). La #3 es una elipse, similar al caso del círculo así que no esperamos alguna respuesta en particular.

Estas tres curvas están presentes básicamente para que los estudiantes tengan confianza, consideren lo que ellos saben y lo más importante, desde la perspectiva del investigador, para servir de apoyo para el análisis de otras respuestas, sabiendo que estas curvas no plantean problema alguno (hipótesis).

Curvas #2 y #10

Por estas curvas, la concepción global estricta debería conducir a la no existencia de una tangente en el punto indicado ya que la recta « cortaría » la curva. Este tipo de respuestas pueden eventualmente ir acompañada de una marca (o traza) gráfica, para indicar el segundo punto de intersección. Codificamos las respuestas por **G** por *Global*.

Trazar una recta tangente en un punto indicado que corta claramente la curva es un claro signo de una percepción local de lo que es una tangente, por lo que puede intersecar la curva sin problemas. Esta es una fuerte intención del sujeto en precisar que una tangente es un objeto global (una recta) cuya definición es local (también podemos ver una flexibilidad entre las perspectivas locales y globales). Nosotros codificamos esta respuestas con una **L** de *Local*. Posteriormente, no detallaremos las respuestas codificadas por L a aquellas que posean una traza gráfica de la(s) tangente(s) dado que nos parece claro el punto de vista local.

Respuestas intermedias pueden aparecer : ya sea porque la concepción local no permite trazar una recta que cruce la curva (descrito anteriormente), o por una concepción global (menos estricta) que se adapta a la situación mediante la restricción del *dominio de definición* de una tangente que es solo una parte conexa de una recta (esta concepción se desarrolla alrededor de los puntos de vista local y puntual, pero la inyectividad supone que $M \to T_M$ y genere un débil punto de vista global). Es difícil decidir entre las dos interpretaciones con un solo registro que es el gráfico, salvo que la traza se detenga justo antes de cortar o “cruzar” la curva. También es posible que existan indicaciones verbales de la restricción. Codificamos estas respuestas con **Gloc**.

Por estas dos curvas, es posible ver un cambio de dominio ya sea para justificar la existencia o no existencia (para #2, ya que no es una representación habitual de un gráfico de una función y #10 no es la gráfica de una función con la propiedad que solo las curvas de las funciones poseen tangentes. Sin embargo, la distinción G / L / Gloc debería ser suficiente para responder y estos cambios de dominio deberían ser limitados.

Curva #4

Esta curva es un caso particular (cf. la curva #2) y especialmente se solicita la tangente en el punto singular (como un punto estacionario de una cicloide). La tangente existe y es vertical, pero es posible que este caso nunca sea encontrado por los estudiantes. Aquí, se espera cambios de dominio al tratar de tomar información en términos de la derivada (ya sea por la existencia o, más probablemente, la inexistencia de una diferenciabilidad o un número derivado infinito - así la codificación es **One**). Aquí, el cambio de dominio es causada por el proceso de visualización y la no apropiación del referencial teórico que en este caso da soporte a la respuesta.

Es también posible (Páez y Vivier 2013) que la concepción global requiera de trazar rectas que pasan por el punto, pero no son tangentes: estas rectas tienen, de hecho, solo un punto común con la curva a pesar de la gran distancia con la imagen mental que se tiene de una tangente - pero aquí la respuesta puede ser promovida por la curva que no es habitual. La concepción débil del punto de vista local en la interpretación de la concepción global está mucho más tensionado aquí y conduce a la desaparición del punto de vista local. Estas rectas concurrentes pasan por el punto indicado y las codificamos por **RC,** *rectas concurrentes*. Esta respuesta puede ser positiva debido a la existencia de una (o muchas) tangente(s), y será negativa porque hay muchas rectas y falla la unicidad de la tangente. Cuando existen muchas rectas trazadas como solución, las codificamos por **RC+**. Aquí, los puntos de vista puntual activa la génesis discursiva (polo teórico) que sugiere la existencia de otras rectas. RC no es una respuesta esperada en estas curvas. Nosotros postulamos que RC solo puede aparecer, esencialmente, para las curvas no regulares.

El punto de vista global puede ser suficiente para una respuesta correcta, pero la tangente corta la curva y puede que la recta no sea considerado como la tangente.

Hay que tomar en cuenta que un cambio de dominio hacia la cinemática puede conducir a la no existencia ya que este punto es estacionario (el vector velocidad es cero y no puede dirigir ninguna recta). Este cambio de dominio puede darse al considerar las trazas (o signos) que describen la trayectoria.

Curvas #5 y #9

La concepción local (L) conduce simplemente a una línea recta idéntica (es posible que algunas respuestas solo sean la manifestación de una concepción local, porque *no hay nada que dibujar!* Aunque en este caso, se espera una explicación verbal de tipo : *la misma recta !*). Una concepción global (G) es posible, estrictamente hablando o bien del tipo Gloc (como en #2), y dar una respuesta de no existencia porque hay un número infinito de puntos en común (el debilitamiento del punto de vista global ya no es suficiente y se opone a la inyectividad $M \rightarrow T_M$.) También podemos encontrar respuestas del tipo RC, con la existencia (o no existencia RC+ cuando se combina con la propiedad de unicidad).

Sin embargo, la recta es una representación gráfica de una función que es conocida por casi 5 años por los estudiantes de esta investigación. Aquí, el cambio de dominio puede ser beneficioso porque hay una función afín y sabemos que estas funciones son funciones diferenciables. Este cambio de dominio debe dar lugar a la existencia de una tangente (recordemos sin embargo, que este argumento surge después de una hora de trabajo, individual y en parejas, seguida de un debate entre los profesores de matemáticas en México (Páez et Vivier 2013)).

Por la curva 9 también se pregunta una tangente a una parte o porción rectilínea, pero en este caso la curva no es identificable y puede haber diferencias en las respuestas.

Curvas #6 y #8

Las tangentes a estas curvas son los puntos de inflexión y la tangente cruza (o *atraviesa)* la curva porque hay un cambio de concavidad. Aquí, el hecho de que la segunda derivada sea cero puede conducir a la percepción de que la curva es localmente una recta, y también una situación similar a las curvas #5 y #9. Esperamos específicamente tener respuestas negativas del estilo "no, porque la tangente cruza la curva", codificada por **C** de *cruzar*.

Para la curva #6 esperamos un cambio de dominio al declarar que la curva no tiene tangente en este punto (la función no es diferenciable, o « derivada infinita »), y similarmente para la curva #8 (esta curva no es representativa de la gráfica de una función), pero es probable que sea la concepción global (G) que “masivamente” lleve a responder la inexistencia de la tangente en la curva #8.

Curva #11

Esta curva tiene dos posibles respuestas para la tangente en el punto, pues tiene multiplicidad dos (considerando coordenadas paramétricas). Para responder de manera positiva, es necesario hacer caso omiso de la propiedad de unicidad. Un cambio del dominio de la cinemática (gestos) es aquí operacional y puede conducir a la existencia de dos tangentes, distinguiendo temporalmente. Sin embargo, no esperamos argumentos relacionados con curvas paramétricas para esta población de estudiantes.

Los dos tangentes no cruzan la curva y podrían ser compatibles con la concepción global, pero el hecho es que estas dos rectas pueden ser percibidos como que atraviesan la curva (cf. **C**). La no unicidad de las tangentes puede dar lugar a la no existencia de la traza de una de las dos tangentes.

Curva #12

Se puede concluir como en #11 donde se invoca la propiedad de unicidad ya que podemos percibir dos tangentes (o dos medias tangentes). También podemos esperar respuestas del tipo RC como en la curva #4. Un cambio de dominio es operacional porque tiene dos derivadas diferentes, a la derecha y a la izquierda.

Esta curva tiene una forma que parece claramente desigual. La génesis semiótica es esencial en este caso y el proceso de visualización lleva a una interpretación de una curva que es de primordial importancia: la curva es regular o no? Cabe señalar que en todas las curvas presentadas, esta pregunta es válida, pero la pregunta puede ser más probable que se realice en #12 debido a la traza propuesta. Podemos decir que la curva es regular ("suave"), sin que uno está realmente en condiciones de decir cuál es la tangente, porque tenemos una percepción global de la curva en esa traza propuesta, o porque hay una tangente porque la curva no es regular, pero no se ve con la traza propuesta debido a que no es lo suficientemente específica. De hecho, la traza no dice nada sobre el comportamiento local de la curva y la única respuesta verídica (o exacta) es que no se puede responder.

Resultados[2]

El estudio experimental fue realizado a 44 estudiantes chilenos de segundo semestre de un curso de Calculo II durante el año universitario 2014. Cabe señalar que la noción de derivación no se aborda en el liceo (obligatoriamente) y que la tangente es mostrada como un elemento auxiliar de la circunferencia al final de la escuela chilena primaria (grado 8, 13 años). En general, los estudiantes encuentran estas nociones en el primer año en los cursos de Cálculo, las curvas en otras coordenadas (paramétricas y polares son parte del estudio en estos cursos) y poseen conocimientos elementales de cinemática a nivel del liceo. En los cursos de cálculo se sigue con el estudio habitual de derivada desde una perspectiva geométrica, y reposando esencialmente sobre los puntos de vista local y global del "límite de una secante", noción que se observa o desarrolla principalmente en el paradigma de AC y sobre todo con una idea intuitiva e icónica de tangente.

Estudio general con los indicadores

Como era de esperar, las curvas 1, 3 y 7 no presentaron problema y se obtuvieron respuestas con un éxito completo, excepto en la curva 7 para A24 que no responde (tampoco A24 responde a las curvas 8, 10, 11 y 12 y muestra una gran inestabilidad en sus respuestas). A continuación, se muestras respuestas de otras curvas donde hemos puesto atención a la relación entre ellas y los indicadores utilizados. Los resultados que se encuentran en la tabla 1 no arrojan este análisis.

Tabla 1

Resultados generales de 44 estudiantes chilenos de primer año universitario

[2] Nos apoyamos en la evidencia escrita para nuestro análisis, pero señalamos que nada decimos sobre lo que realmente pensaba el estudiante.

	#2	#4	#5	#6	#8	#9	#10	#11	#12
NR	0	1	5	8	8	2	5	14	3
L	10	1	19	9	12	18	8	3	0
G	18	1	6	10	15	10	14	3	2
Gloc	13	0	0	1	0	0	12	0	0
RC(RC+)	1	22(5)	12(2)	8(1)	2	7	0	11	23(2)
One(C)	1	19	2	8(4)	5	5	3	12	16
O	1	0	0	0	2	2	2	1	0

Se obtuvieron 13 respuestas de tipo L comunes a #5 y #9 (incluyendo 8 estudiantes dieron la misma respuesta L para las curvas 5, 6, 8 y 9). Sin duda, podemos identificar de manera más bien evidente, un punto de vista local. Sin embargo, entre estos estudiantes, esto no es siempre el punto de vista local que domina, especialmente para las curvas inusuales: A33 y A34 dan respuestas de tipo RC en #4 y #12 y A29 da una respuesta RC a #11 (dibuja una línea vertical), mientras que todas las otras respuestas son de tipo L

No es sorprendente que el número de respuestas basado en la concepción global (respuestas G) sea importante para todas las curvas donde la tangente corta a la curva (#2, #8 y #10) y para las curvas localmente rectilíneas (#9 y #5). Es lo mismo para #6 con la posibilidad de visualizar una curva local rectilínea, como lo fue para 5 estudiantes de los diez que respondieron G en #6, y que también proporcionaron la misma respuesta G en #9.

Los 13 estudiantes que respondieron Gloc en #2, 8 respondieron Gloc en #10. Esta disposición es coherente para muchos estudiantes - algunos son más cercanos a "G" como A39 o más aun de estudiantes que responden « L » como A7. El estudiante A25 expresa claramente la existencia de una tangente local en #8 y #10, el punto de vista global es en gran medida depreciado.

Como era de esperar, RC es más importante para las curvas #4 y #12. Pero nos parece más sorprendente la fuerte presencia de este tipo de respuestas para curvas localmente rectilíneas como en #5 y #9 y también #6. Esto permite validar nuevamente la relación visual entre las curvas localmente rectilíneas y las curvas que presentan un punto de inflexión. La diferencia con el pequeño número de respuesta RC en #8 se explica por la *concurrencia* de la concepción global para este tipo de curvas que resultan, tal vez, más convincente para los individuos en cuestión, a la no-existencia.

Otras respuestas de inexistencia (One), son importantes para #4, #11 y #12 (no estamos hablando aquí de #6, que es particular, con el argumento de "la recta a atraviesa la curva"). Cabe señalar que cada uno de los puntos son en realidad puntos en los que hay un problema de diferenciabilidad (derivada infinita o velocidad nula para #4, gradiente cero para #11 y no diferenciabilidad para #12). De hecho, los argumentos son a menudo utilizando diferenciabilidad en #4 y #12, entonces con un cambio de dominio: 13 argumentos sobre 19 para #4 y 9 argumentos sobre 16 para #12. Los otros argumentos son la no unicidad, especialmente para #11 y #12, y que la curva no representa una función.

Es interesante constatar que de las 71 respuestas One, 29 respuestas relacionan directamente con la no diferenciabilidad, 2 con la continuidad (no se especifique lo contrario), 9 sobre pendientes, 5 sobre la no unicidad de la tangente y otros 3 sobre funciones. Por lo tanto, 48 argumentos sobre 71 que están relacionados más o menos directamente a la noción de función, lo que valida, al menos parcialmente, nuestra hipótesis sobre cambios de dominio.

Cabe señalar que solo los estudiantes A9 y A23 tienen un puntos de vista local en el dominio del análisis (paradigma AI) evocando el límite en #4 y #12. Todos los otros cambios de dominio se inscriben en el paradigma AC.

Estudios complementarios (desarrollo en el taller)

Un estudio con el Análisis Estadístico Implicativo con software CHIC muestra una coherencia estadística de las variables, ya sea en árboles de similitud (o cohesitivo) o en el gráfico implicativo. Se distingue claramente los bloques de L, G, RC y NR. No es presentamos aquí el desarrollo de estos análisis, pero los gráficos estadísticos constituirán un trabajo específico en el taller.

Se identificaron tres perfiles "típicos" : estudiantes que tienen un perfil G (como A17), estudiantes que tienen perfil RC (como A10 y A14), y estudiantes con un perfil L (A28 , A29, A33). Además, dos estudiantes (A6, A12) tienen un ETM principalmente guiado por las funciones pues frecuentemente cambian de dominio, y por último A18, A19, A41 los consideramos como casos atípicos. El estudiante A10 tiene un perfil interesante casi totalmente guiado por las visiones globales y puntuales.

Conclusión

Lo que se desprende de este estudio es, en primer lugar, la dificultad del concepto de la tangente y la inestabilidad de este concepto entre los estudiantes en una tarea aparentemente simple en el registro gráfico. Esta inestabilidad del conocimiento se refleja en particular en la adaptación a diferentes curvas, el estudiante es guiado por la visualización sin el control epistemológico. Esto confirma las conclusiones de Tall y Vinner (1981, p 152): *different stimuli can activate different parts of the concept image, developing them in a way which need not make a coherent whole*. Muchas de las respuestas son incorrectas, a veces fuertemente como las respuestas RC, y algunos estudiantes tienen respuestas incoherentes. A menudo, la causa es un defecto en la perspectiva local y, en menor medida, desde el punto de vista global.

También observamos un cambio de dominio frecuente, en particular, pero no exclusivo, para afirmar una no-existencia. Los estudiantes se apoyan efectivamente de su solo conocimiento sobre la tangente que está relacionado o conectado a las funciones diferenciables persuadidos por la misma unicidad de la tangente. El trabajo con la diferenciabilidad esconde el punto de vista local sobre la tangente en el dominio inicial o fuente, la geometría, con un paradigma en AC, pues no se necesita un punto de vista local en el dominio de las funciones. Estos cambios de dominio rara vez permiten entregar una respuesta correcta porque en el dominio de las funciones enseñado es demasiado restrictivo para comprender el concepto de tangente. Entonces, ¿qué representaciones privilegiamos en la enseñanza y qué conocimiento sobre la tangente pueden tener los estudiantes? ¿Podemos realmente apoyarnos sobre la noción de tangente para introducir el concepto de derivación?, noción por lo demás tan gravitante en los cursos de cálculo.

Nosotros postulamos, que se requieren los tres puntos de vistas, global, local y puntual, para realizar la tarea gráfica, el defecto o la reducción de uno de ellos conduce respuestas incompletas y, a menudo incorrectas, produciendo a veces una producción (respuesta) alejada a la de una tangente – sin embargo, notamos que el punto de vista puntual está siempre utilizado. Bajo la perspectiva del ETM, la tangente que puede instrumentalizar la noción de derivada no se logra pues la misma tangente no ha sido desarrollada en este ETM, ni menos aun, se han activado las tres génesis que articulan epistemológicamente y cognitivamente esta noción.

Por otro lado, hemos observado que este tipo de respuestas se encuentran en otros contextos institucionales, tales como en profesores en México (Páez y Vivier 2013), en estudiantes-profesores en Francia (Vivier 2013), e incluso pero menos sorprendente en estudiantes de secundaria (grado 11, 17 años) en Francia pero antes de la enseñanza de la derivación (Vivier, 2010).

Por supuesto, trabajar sobre la tangente, no puede restringirse a un trabajo gráfico exclusivamente. Es necesario complementarla mediante el trabajo con expresiones formales (funciones, ecuaciones de curva) y de trabajar la noción en el dominio del análisis (o del álgebra) confrontando las definiciones y propiedades que enriquecen la simple percepción, y donde incluso el uso de tecnología (u otro artefacto) robustecería una noción tan basal (como lo es la tangente) para la construcción de otras nociones en análisis.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (1998), Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1*(1), 41-56.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *15*(1), 7-47.

Estrella, S., Kuzniak, A., Montoya, E., & Vivier, L. (2015). El trabajo matemático en el Análisis: una aproximación A los ETM en Francia y Chile. *Actes du colloque ETM4*. 30 juin-04 juillet 2014, Madrid, Espagne.

Houdement C., & Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *11*, 175-193.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9 – 24.

Maschietto, M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu global / local dans l'environnement de calculatrices* (Thèse de doctorat). Université Paris 7.

Montoya, E., & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19*, 73-101.

Páez Murillo, R. E., & Vivier, L. (2013). Evolution of teachers' conceptions of tangent line. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*, 209– 229.

Richard, P.R. & Kuzniak, A. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(3) (sous presse).

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *6*(1).

Tall, D. O. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer, London.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and conception definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12,* 151–169.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 149 – 185.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Mathematics Education Library, Kluwer, Academic Publishers.

Vivier, L. (2013). Without derivatives or limits: from visual and geometrical points of view to algebraic methods for identifying tangent lines. *International Journal of Mathematic Education in Science and Technology*, *44*(5), 711-717.

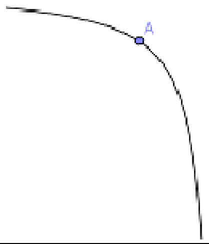
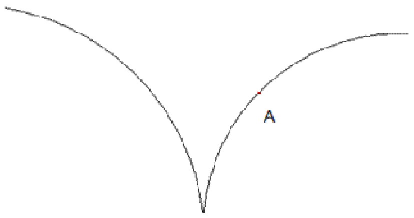
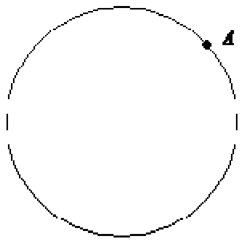
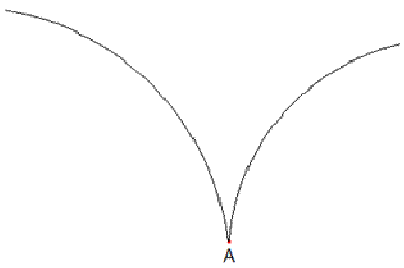
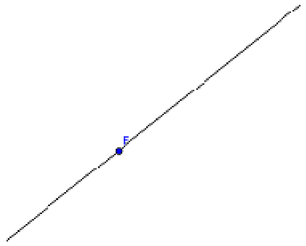
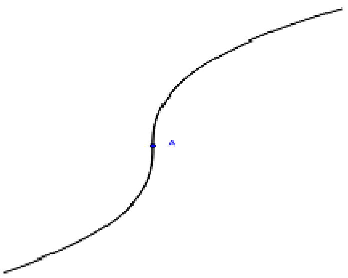
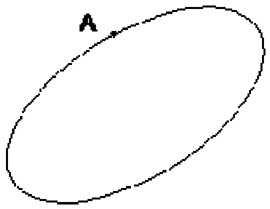
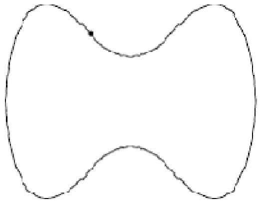
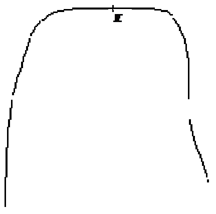
Vivier, L. (2010). La noción de tangente en la educación media superior. *El cálculo y su enseñanza*, Vol. II, México.

Apéndice A

Curvas del cuestionario (las curvas están reducidas en un 50%)

Instrucciones:

Para las siguientes gráficas, dibuja una tangente en el punto señalado en caso que la tangente exista o brindar una explicación en el caso de que no exista.

Gráfica No. 1	Gráfica No. 2	Gráfica No. 3
		
Gráfica No. 4	Gráfica No. 5	Gráfica No. 6
		
Gráfica No. 7	Gráfica No. 8	Gráfica No. 9
		
Gráfica No. 10	Gráfica No. 11	Gráfica No. 12